Colección Lambda

# Sucesiones y Series

*Teoría y práctica*

Sucesión de números reales
Series de números reales
Series de potencias
Progresiones aritmética, geométrica e hipergeométrica

ANÁLISIS MATEMÁTICO




Juan Carlos Ramos Leyva

# SUCESIONES Y SERIES

## SUCESIÓN DE NÚMEROS REALES
## SERIES DE NÚMEROS REALES
## SERIES DE POTENCIAS
## PROGRESIONES ARITMÉTICA, GEOMÉTRICA E HIPERGEOMÉTRICA

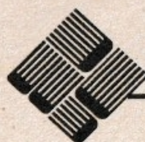
**Teoría y Problemas Selectos**

Juan Carlos Ramos Leyva

GRUPO EDITORIAL



Megabyte




Primera Edición 2016

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú
Nº 2016-08151 (Ley Nº 26905 / D.S. Nº 017-98-ED)
R.U.C.Nº 20507993444

**Autor**
Lic. Juan Carlos Ramos Leyva

**Diseño de carátula y Diagramación**
© Departamento de Edición y Producción GEM

## Sucesiones y series





**Distribución y Ventas**
Jr. Rufino Torrico 889 of. 208 - Cercado de Lima
**Telefax:** 332-4110

www.editorialmegabyte.com

# Presentación

Quizá todas las personas coincidan en pensar que mientras tengamos vida podemos, si nos proponemos, vencer todo obstáculo existente, en ocasiones con ayuda de un ser querido o un buen amigo que sepa encaminarte cuando te creas perdido.

La vida es una constante de retos que debemos enfrentar con éxito, cada día que pasa es un triunfo para nosotros, debemos dejar de lado el pasado vivir bien el presente, pues de ello depende nuestro futuro.

SUCESIONES Y SERIES es una obra que me animé a escribir con el único objetivo de cubrir ese vacío existente de material teórico - práctico no tan riguroso, pero si ceñido a la formalidad que la ciencia exige.

El contenido de esta obra víncula tres etapas bien definidas.

1. Exposición de la teoría clara y concreta acompañada de ejercicios de aplicación.
2. Serie de ejercicios y problemas resueltos ordenados secuencialmente según el grado de dificiultad.
3. Serie de ejercicios y problemas propuestos.

Sin lugar a duda esta obra permitirá que el estudiante asimile un mayor dominio de este tema tan importante dentro de la matemática.

Finalmente agradezco al Grupo Editorial **Megabyte** por hacer posible esta publicación esperando que tenga la misma acogida que las presentadas anteriormente, me despido de todos mis amigos, estudiantes y colegas de quienes siempre espero sus críticas que para mi es muy grato. Hasta pronto.

***Lic. Juan Carlos Ramos Leyva***

# Índice

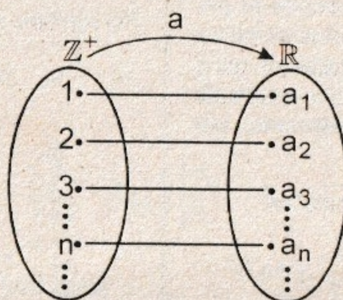
# SUCESIONES Y SERIES
# PROGRESIÓN ARITMÉTICA
# PROGRESIÓN GEOMÉTRICA
# PROGRESIÓN HIPERGEOMÉTRICA

## 1. SUCESIÓN DE NÚMEROS REALES

### 1.1 DEFINICIÓN

Una sucesión es aquella función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos $(\mathbb{Z}^+)$ y rango un subconjunto del conjunto de los números reales $(\mathbb{R})$. Consensuadamente $a_n$ representa al término que ocupa la posición n en una sucesión.

En un diagrama conjuntista tenemos:




$$a = \{(1;a_1), (2;a_2), (3;a_3), ......, (n;a_n), ...\}$$

Formalmente tenemos la sucesión $a = \{(n;a_n) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ cuyo conjunto de imagenes es $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$ un objetivo principal del estudio de las sucesiones es el análisis de sus imagenes, razón por la cual consensuadamente podemos denotar a la sucesión solo por su conjunto imagen.

$$\{a_n\}_{n\geq 1} = \{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$$

## 1.2 REGLAS PARA REPRESENTAR SUCESIONES

### 1.2A) Regla Analítica

En esta regla la sucesión se representa por una fórmula que permite determinar cualquier término de ella.

A dicha fórmula se le da el nombre de fórmula del término general de la sucesión, algunos ejemplos son:

* $\{a_n = 2n+1\} = \{3;5;7;9;...;2n+1;...\}$

* $\left\{b_n = \frac{1}{n}\right\} = \left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};...;\frac{1}{n};...\right\}$

* $\left\{c_n = (-1)^n\right\} = \left\{-1;1;-1;1;...;(-1)^n;...\right\}$

### 1.2B) Regla Recurrente o Recursiva

En esta regla se conoce al primer elemento, a veces varios primeros elementos, y una fórmula (relación recurrente) que indica la operación a ejecutar para calcular el siguiente elemento, por ejemplo:

Sea la sucesión $\{a_n\}$ definida así:

$$a_1 = 2 \text{ y } a_{n+1} = (n+2)a_n;\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Si n = 1, entonces $a_2 = 3a_1 = 3\cdot 2 = 6$

Si n = 2, entonces $a_3 = 4a_2 = 4\cdot 6 = 24$

Si n = 3, entonces $a_4 = 5a_3 = 5\cdot 24 = 120$

⋮

Nótese que la regla recurrente dada define a la siguiente sucesión:

$2!\ ;\ 3!\ ;\ 4!\ ;\ 5!\ ;\ ...\ ;\ (n+1)!\ ;\ ...$

Donde el elemento que representa al término general es $a_n = (n+1)!\ ;\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$

### 1.2C) Regla Descriptiva

En esta regla la sucesión se da en forma verbal, describiendo sus términos, por ejemplo:

* La sucesión $\{a_n\}$, donde $a_n$ es la n–ésima cifra en la notación decimal del número irracional e (número de napier); es decir:

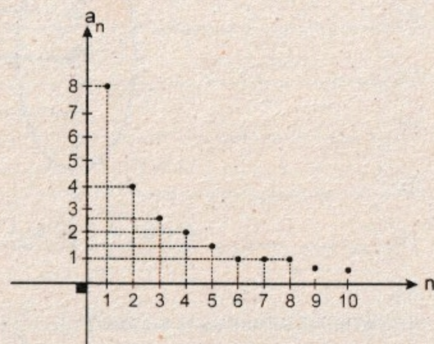
$$a_1 = 2\ ;\ a_2 = 7\ ;\ a_3 = 1\ ;\ a_4 = 8\ ;\ ...$$

### 1.2D) Regla Gráfica

**En el Plano Cartesiano**: Como la sucesión $\{a_n\}$ es una función con dominio $\mathbb{Z}^+$, los puntos que debemos graficar son de la forma $(n\ ;\ a_n)$.

Por ejemplo representemos

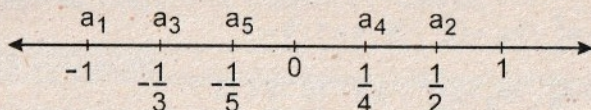
$$a_n = \frac{8}{n}\ ;\ n \in \mathbb{Z}^+$$




**En el eje Real**: Los elementos de la sucesión $\{a_n\}$ pueden ser representados por los puntos $x = a_n$ , $n \in \mathbb{Z}^+$ en la recta numérica.



Por ejemplo representaremos $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ; $n \in \mathbb{Z}^+$.




Nótese que esta regla es muy sugerente respecto hacia que número se acerca $a_n$ cuando **n** crece indefinidamente.

## 1.3 ÁLGEBRA DE SUCESIONES

Sean las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, formalmente se definen las operaciones:

**1.3A) Adición**

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} \; ; \; \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

**1.3B) Sustracción**

$$\{a_n\} - \{b_n\} = \{a_n - b_n\} \; ; \; \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

**1.3C) Multiplicación**

$$\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\} \; ; \; \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

**1.3D) División**

$$\{a_n\} \div \{b_n\} = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} , \; b_n \neq 0 \; ; \; \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

## 1.4 IGUALDAD DE SUCESIONES

Sean las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ si se establece que $a_n = b_n$; $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, se dice que dichas sucesiones son iguales.

$$a_n = b_n \; ; \; \forall\, n \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow \{a_n\} = \{b_n\}$$

**Ejercicio 01:**

Determine el quinto término de la sucesión $\{a_n\}$ definida por:

$a_1 = -1$ ; $a_2 = 1 \wedge a_{n+2} = a_{n+1}^2 - 3a_n$ ; $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

A) 61 B) 97 C) 157 D) 193 E) 251

***Resolución:***
Según la relación recurrente tenemos:

$$a_{n+2} = a_{n+1}^2 - 3a_n \ ; \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Si $n = 1 \Rightarrow a_3 = a_2^2 - 3a_1 = (1)^2 - 3(-1) = 1 + 3 = 4$

Si $n = 2 \Rightarrow a_4 = a_3^2 - 3a_2 = (4)^2 - 3(1) = 16 - 3 = 13$

Si $n = 3 \Rightarrow a_5 = a_4^2 - 3a_3 = (13)^2 - 3(4) = 169 - 12 = 157$

$\therefore$ Quinto término = 157

***Clave:*** **C**

**Ejercicio 02:**

Representar graficamente a la sucesión $\{a_n\}$ donde $a_n = 2 + (-1)^n$.

***Resolución:***

$a_1 = 2 + (-1)^1 = 2 - 1 = 1$ $\qquad a_2 = 2 + (-1)^2 = 2 + 1 = 3$

$a_3 = 2 + (-1)^3 = 2 - 1 = 1$ $\qquad a_4 = 2 + (-1)^4 = 2 + 1 = 3$

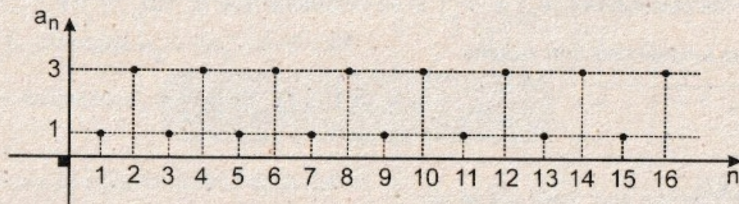
$\vdots$

Formalmente:

$a = \{(1; a_1), (2; a_1), (3; a_3), (4; a_4), ....., (n ; a_n), ....\}$

$a = \{(1;1), (2;3), (3;1), (4;3), ....., (n ; 2 + (-1)^n), ....\}$

Graficando tenemos:




**Ejercicio 03:**

Dadas las sucesiones $\{Cos(n\pi)\}$ y $\{(-1)^n\}$. ¿Son iguales?

***Resolución:***
Nótese que las sucesiones dadas, aunque de apariencia distinta, son iguales.
En efecto:

$\text{Cos}(n\pi) = (-1)^n$, esto es, $\text{Cos}(\pi) = -1$; $\text{Cos}(2\pi) = 1$; $\text{Cos}(3\pi) = -1$ ; ........etc.

## 2. SUCESIONES ACOTADAS

### 2.1 SUCESIÓN ACOTADA INFERIORMENTE:

La sucesión $\{a_n\}$ es acotada inferiormente si y solo si existe un número real **m** tal que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ es cierta la desigualdad $a_n \geq m$.

### 2.2 SUCESIÓN ACOTADA SUPERIORMENTE:

La sucesión $\{a_n\}$ es acotada superiormente si y solo si existe un número real M tal que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ es cierta la desigualdad $a_n \leq M$.

### 2.3 DEFINICIÓN

La sucesión $\{a_n\}$ es acotada si y solo si existe m, $M \in \mathbb{R}$ tal que es cierta la desigualdad $m \leq a_n \leq M$; $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$.

En forma equivalente decimos que una sucesión es acotada si y solo si es acotada inferiormente y superiormente a la vez.

Con mayor brevedad tenemos $|a_n| \leq c$, donde c es el mayor elemento del conjunto $\{|m|, |M|\}$.

***Observación:*** La sucesión $\{a_n\}$ se dice no acotada si y solo si para todo elemento $c > 0$ existe un elemento $a_n$ de la sucesión que verifica la desigualdad $|a_n| > c$.

**Ejercicio 04:**

Dada la sucesión $\left\{\frac{n+2}{n+1}\right\}$. ¿Es acotada?

***Resolución:***

Suponiendo que: $a_n = \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1}$

$$a_n = 1 + \frac{1}{n+1}$$

Según la teoría $n \in \mathbb{Z}^+$, en consecuencia:

$n \geq 1 \leftrightarrow 1 \leq n < \infty$

$$2 \leq n+1 < \infty \leftrightarrow 0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$1 < 1 + \frac{1}{n+1} \leq 1 + \frac{1}{2} \leftrightarrow 1 < a_n \leq \frac{3}{2}$$

Aquí fácilmente reconocemos que $\{a_n\}$ es una sucesión acotada.

Nótese también que:

$$1 < a_n \leq \frac{3}{2} \leftrightarrow |a_n| \leq \frac{3}{2} \ ; \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

**Ejercicio 05:**

Averiguar si la sucesión $\left\{\frac{(-1)^n}{n+3}\right\}$ es acotada.

***Resolución:***

Suponiendo que $a_n = \frac{(-1)^n}{n+3}$, según la forma equivalente de la definición tenemos:

$$|a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n+3}\right| = \frac{1}{n+3} \quad \text{.....................(1)}$$

Como $n \in \mathbb{Z}^+$, se plantea que:

$$n \geq 1 \leftrightarrow 1 \leq n$$

$$4 \leq n+3 \leftrightarrow \frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{4} \quad \text{...............(2)}$$

De (1) y (2) se concluye que:

$$|a_n| \leq \frac{1}{4} \ ; \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$\therefore$ La sucesión $\{a_n\}$ es acotada.

**Ejercicio 06:**

Dada la sucesión $\{(-1)^n \cdot n\}$. ¿Es acotada?

***Resolución:***

Veamos los primeros términos de la sucesión:

$$-1 ; 2 ; -3 ; 4 ; -5 ; 6 ; .....$$

De acuerdo con la observación citada para **sucesión no acotada** nótese que para cualquier número positivo **c** siempre existirá un elemento de la sucesión $\{a_n\}$ que verifique $|a_n| > c$.

Por ejemplo si c = 10 bastara con elegir $a_{11} = -11$ cumpliendose que $|a_{11}| > c$.

Por tanto se concluye que la sucesión dada es no acotada.

## 3. SUCESIONES MONÓTONAS

### 3.1 SUCESIÓN CRECIENTE:

Dada la sucesión $\{a_n\}$, decimos que es creciente si y solo si se establece la desigualdad:

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < .... < a_n < a_{n+1} < ...$$

O bien con mayor brevedad:

$$a_n < a_{n+1} \ ; \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

### 3.2 SUCESIÓN DECRECIENTE:

Dada la sucesión $\{a_n\}$, decimos que es decreciente si y solo si se establece la desigualdad:

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > .... > a_n > a_{n+1} > ...$$

O bien con mayor brevedad:

$$a_n > a_{n+1} \ ; \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$



### 3.3 SUCESIÓN NO DECRECIENTE:

Dada la sucesión $\{a_n\}$, decimos que es no decreciente si y solo si se establece la desigualdad:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq .... \leq a_n \leq a_{n+1} \leq ....$$

O bien con mayor brevedad:

$$\boxed{a_n \leq a_{n+1} \ ; \ \forall n \in \mathbb{Z}^+}$$

### 3.4 SUCESIÓN NO CRECIENTE:

Dada la sucesión $\{a_n\}$, decimos que es no creciente si y solo si se establece la desigualdad:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq_4 \geq .... \geq a_n \geq a_{n+1} \geq ....$$

O bien con mayor brevedad:

$$\boxed{a_n \geq a_{n+1} \ ; \ \forall n \in \mathbb{Z}^+}$$

**Ejercicio 07:**

Demostrar que la sucesión $\{a_n\}$, con $a_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ es creciente:

***Resolución:***

Para demostrar que la sucesión es creciente bastara demostrar que $a_n - a_{n+1}$ es un número negativo.

$$a_n = \frac{n+1}{n+2} \rightarrow a_{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1+2} = \frac{n+2}{n+3}$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n+2}{n+3} = \frac{(n+1)(n+3)-(n+2)(n+2)}{(n+2)(n+3)}$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n^2+4n+3-(n^2+4n+4)}{(n+2)(n+3)} = \frac{-1}{(n+2)(n+3)}$$

Como $n \in \mathbb{Z}^+$, fácilmente podemos reconocer que la expresión $\dfrac{-1}{(n+2)(n+3)}$ es negativa. Por tanto: $\quad a_n - a_{n+1} < 0 \leftrightarrow a_n < a_{n+1} \ ; \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Con lo cual queda demostrado que la sucesión $\{a_n\}$ es creciente.

## 4. LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

### 4.1 DEFINICIÓN:

El límite de $\{a_n\}$ es L, lo que se denota por $\text{Lím}(a_n) = L$ o $\lim\limits_{n \to \infty}(a_n) = L$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que $|a_n - L| < \varepsilon$, siempre que $n > N$.

* Si $L \in \mathbb{R}$, decimos que la sucesión es convergente y converge a L.
* Si $L = +\infty$ o $L = -\infty$, decimos que la sucesión es divergente.
* Si L no existe, entonces decimos que la sucesión no converge.

**Ejercicio 08:**

Sea la sucesión $\{a_n\}$, con $a_n = \dfrac{n+4}{n+1}$.

Demuestre formalmente que $\text{Lím}(a_n) = 1$.

***Resolución:***

Según la definición para cada $\varepsilon > 0$ se debe encontrar un número N tal que:

$$|a_n - L| = \left|\frac{n+4}{n+1} - 1\right| = \frac{3}{n+1} < \varepsilon$$

siempre que n > N .....(1)

Ahora transformando la relación:

$$\frac{3}{n+1} < \varepsilon \leftrightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$$

Fácilmente reconocemos que $N = \dfrac{3}{\varepsilon} - 1$

Finalmente podemos concluir afirmando que (1) se cumple si $N = \dfrac{3}{\varepsilon} - 1$. Así queda demostrado que $\text{Lím}(a_n) = 1$.

### 4.2 TEOREMAS:

**4.2A) De la Comparación con Funciones:**

Sea L un número real. Sea f una función de una variable real tal que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Si $\{a_n\}$ es una sucesión tal que $f(n) = a_n$ para cada entero positivo n, entonces se cumple que:

$$\lim_{x \to \infty} (a_n) = \lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

**Ejercicio 09:**

Determine el límite de la sucesión:

$$\frac{2^2-3}{2^2}; \frac{3^2-3}{3^2}; \frac{4^2-3}{4^2}; \frac{5^2-3}{5^2}; \ldots$$

***Resolución:***

Fácilmente podemos reconocer que el término n–ésimo de la sucesión es:

$$a_n = \frac{(n+1)^2 - 3}{(n+1)^2} = 1 - \frac{3}{(n+1)^2}$$

Aplicando el teorema con:

$$f(x) = 1 - \frac{3}{(x+1)^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n) = \lim_{n \to \infty} f(x) = \lim_{n \to \infty} \left[1 - \frac{3}{(x+1)^2}\right]$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n) = 1 - 0 = 1$$

> ***Observación:*** El cálculo de límites para sucesiones es similar al cálculo de límites para funciones en variable real, por tal razón se podran aplicar las diversas reglas tratadas para el límite de una función real en variable real.

**Ejercicio 10:**

Determine el valor de convergencia de la sucesión $\left\{\dfrac{n + Ln(n)}{n^2}\right\}$

***Resolución:***

Suponiendo que $a_n = \dfrac{n + Ln(n)}{n^2}$, el ejercicio consiste en calcular el siguiente límite:

$$L = \lim_{n \to \infty} (a_n) = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{n + Ln(n)}{n^2}\right]$$

Como la indeterminación es de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ podemos aplicar la regla de L' Hôpital, veamos:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2n}\right) = \frac{1+0}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$\therefore$ La sucesión $\{a_n\}$ converge a $L = 0$

**Corolario:**

Si f(x) es continua y $\lim_{n\to\infty}(a_n) = L$,

entonces se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty}(a_n)\right) = L$$

En forma equivalente se dice que se puede pasar el límite dentro de una función continua.

Por ejemplo sea la sucesión $\{a_n\}$, con

$a_n = \frac{5n}{n+3}$ y la función $f(x) = e^x$.

Con $f(x) = e^x$ se tiene $f(a_n) = e^{a_n} = e^{\frac{5n}{n+3}}$

**Aplicando el corolario:**

$$\lim_{n\to\infty}\left[e^{\frac{5n}{n+3}}\right] = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty}(a_n)\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[e^{\frac{5n}{n+3}}\right] = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{n+3}\right)} = e^5$$

**4.2B) De la Condición Necesaria:**
Toda sucesión convergente es acotada. Debemos aclarar que el reciproco de este teorema, en general, no es verdad, es decir que si una sucesión es acotada no podemos afirmar que sea convergente.

**4.2C) De la Condición Suficiente (de KARL WIERSTRASS):**
Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

## 4.3. PROPIEDADES

**4.3A) De Existencia:**
El límite no cambia si se varían o se eliminan un número finito de términos de la sucesión.

**4.3B) De Unicidad:**

Siendo $\{a_n\}$ una sucesión convergente se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1})$$

**4.3C) Del Límite en Operaciones:**

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones convergentes, tales que:

$$\text{Lím}(a_n) = L \wedge \text{Lím}(b_n) = k$$

**Primero:**

$\text{Lím}(a_n + b_n) = \text{Lím}(a_n) + \text{Lím}(b_n) = L + k$

**Segundo:**

$\text{Lím}(a_n - b_n) = \text{Lím}(a_n) - \text{Lím}(b_n) = L - k$

**Tercero:**

$\text{Lím}(c\cdot a_n) = c\cdot\text{Lím}(a_n) = c\cdot L\ ;\ c\in\mathbb{R}$

**Cuarto:**

$\text{Lím}(a_n\cdot b_n) = \text{Lím}(a_n)\cdot\text{Lím}(b_n) = L\cdot k$

**Quinto:**

$$\text{Lím}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\text{Lím}(a_n)}{\text{Lím}(b_n)} = \frac{L}{k}\ ;\ b_n \neq 0,\ k \neq 0$$

**4.3D) Prueba de la Razón:**

Dada la sucesión $\{a_n\}$, se plantea

$$\text{Lím}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L.$$

Si $L < 1$, entonces $\text{Lím}(a_n) = 0$.

**Ejercicio 11:**

Determine el valor de convergencia de la siguiente sucesión:

$$\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3\sqrt{3}}\ ;\ \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}\ ;\ \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}\ ;...$$

***Resolución:***

La sucesión dada se puede reescribir así:

$$a_1 = \sqrt{3} \wedge a_{n+1} = \sqrt{3a_n}\ ;\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Ahora en la siguiente igualdad:

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$$

Aplicamos la propiedad de unicidad:

$$\text{Lím}(a_{n+1}) = \text{Lím}\left(\sqrt{3a_n}\right)$$

$$\text{Lím}(a_{n+1}) = \sqrt{3\,\text{Lím}(a_n)}$$

$$L = \sqrt{3L}\quad ;\ L > 0$$

$$L^2 = 3L \rightarrow L = 3$$

$\therefore$ La sucesión dada converge a $L = 3$

**Ejercicio 12:**

Determine el valor de convergencia de la siguiente sucesión $\{a_n\}$, donde $a_n = \dfrac{n^3}{4^n}$.

***Resolución:***

De acuerdo con la prueba de la razón procedemos así:

$$L = \text{Lím}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Nótese que:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)^3}{4^{n+1}}}{\dfrac{n^3}{4^n}} = \frac{4^n\cdot(n+1)^3}{4^{n+1}\cdot n^3}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$$

Cuando $n \rightarrow \infty$ tenemos:

$$L = \frac{1}{4}\cdot(1+0)^3 = \frac{1}{4}\cdot(1)^3 = \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4}$$

Como $L = \dfrac{1}{4} < 1$, entonces $\text{Lím}(a_n) = 0$

$\therefore$ La sucesión $\{a_n\}$ converge a cero

## 5. SUBSUCESIONES

**5.1 CONCEPTO:**

Si formamos una sucesión prescindiendo de algunos de los términos de una sucesión dada, entonces esta nueva sucesión se llama subsucesión de la sucesión original.

Por ejemplo dada la sucesión:

$$\left\{a_n = \frac{1}{n}\right\} = \left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};\frac{1}{6};\frac{1}{7};.....\right\}$$

Al prescindir de los términos cuyo denominador es impar tenemos:

$$\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{6};\frac{1}{8};....\right\} = \left\{b_k = \frac{1}{2k}\right\}$$

Nótese que $\{b_k\}$ es una subsucesión de $\{a_n\}$.

**5.2 DEFINICIÓN:**

Si $\{a_n\}$ es una sucesión y $\{n_k\}$ es



una sucesión creciente, entonces la sucesión $\left\{a_{n_k}\right\}$ se llama subsucesión de $\{a_n\}$ nótese que $a_{n_k}$ está definida mediante una composición de funciones. Esto se hace más aparente si escribimos $a_{n_k}$ en la forma a(n(k)).

Por ejemplo si $a_n = \frac{1}{n}$ y $n_k = 2k$, entonces

$a_{n_k} = a(n(k))$, $a_{n_k} = a(2k) = \frac{1}{2k}$ Ahora se concluye que $\left\{\frac{1}{2k}\right\}$ es una subsucesión de la sucesión de la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

**5.3 TEOREMA:**

Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente, entonces cualquier subsucesión de $\{a_n\}$ converge al mismo punto.

Por ejemplo para $\left\{a_n = \frac{1}{n}\right\}$ y su subsucesión $\left\{b_k = \frac{1}{2k}\right\}$.

Para la sucesión:

$$\left\{a_n = \frac{1}{n}\right\} \rightarrow \text{Lím}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

Ahora para su subsucesión:

$$\left\{b_k = \frac{1}{2k}\right\} \rightarrow \text{Lím}\left(b_k\right) = \text{Lím}\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

**5.4 PROPIEDAD:**

Dada una sucesión $\{a_n\}$ y dos de sus sucesiones $\{b_k\}$ y $\{c_p\}$, la primera formada con todos los elementos que ocupan lugar impar y la segunda con los que ocupa lugar par.

Si $\text{Lím}(b_k) = \text{Lím}(c_p) = L \Rightarrow \text{Lím}(a_n) = L$

**5.5 PUNTOS LÍMITES DE UNA SUCESIÓN:**

**5.5A) Definición:**

Un punto P (número real o $\pm\infty$) es un punto límite de una sucesión $\{a_n\}$ de números reales si toda vecindad de P contiene infinitos términos de la sucesión.

***Observación:*** No se debe confundir los términos punto límite de una sucesión y limite de una sucesión. Un punto es el límite de una sucesión si cualquier vecindad del punto contiene a todos los términos de la sucesión, salvo un número finito.

**5.5B) Teorema:**

Cualquier sucesión $\{a_n\}$ de números reales tiene al menos un punto límite.

**5.5C) Propiedad:**

Si una sucesión tiene más de un punto límite, entonces ni converge ni diverge, decimos que es oscilante.

Por ejemplo la sucesión $\left\{a_n = 1 + (-1)^n\right\}$ es oscilante, en efecto.

$$a_n = \begin{cases} 0 \ ; \ n \text{ es impar} \\ 2 \ ; \ n \text{ es par} \end{cases}$$

Nótese que el límite en la primera subsucesión es cero, mientras que en la segunda es dos (la sucesión tiene más de un punto límite)

$\therefore$ La sucesión $\{a_n\}$ es oscilante

## 6. SUCESIONES NOTABLES

### 6.1 SUCESIÓN CONSTANTE:

Dada la sucesión $\{a_n\}$, decimos que es constante si y solo si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a_n = c$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

La sucesión constante es monótona, pues según la definición puede ser no creciente o bien no decreciente.

Asimismo se afirma que toda sucesión constante es convergente.

### 6.2 SUCESIÓN ALTERNANTE:

Dada una sucesión $\{a_n\}$, decimos que es alternante si y solo si $a_n \cdot a_{n+1} < 0$; $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

La sucesión alternante puede ser convergente.

### 6.3 SUCESIÓN DE CAUCHY:

Una sucesión $\{a_n\}$ es del tipo de Cauchy si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N positivo tal que si $m, n \geq N$, entonces $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

* Toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.

* Si una sucesión es convergente, entonces dicha sucesión es de Cauchy.

### 6.4 SUCESIÓN DE FIBONACCI:

1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; ...

En forma recurrente:

$a_1 = 1; a_2 = 1 \wedge a_{n+2} = a_{n+1} + a_n; \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Resolviendo la ecuación recurrente tenemos:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n}\right]$$

Relación matemática que permite determinar cada término de la sucesión. Esta forma explicita se debe a Jacques Binet, razón por la cual se le conoce que la fórmula de Binet.

> ***Observación:*** En 1202 el matemático italiano **Leonardo de Pisa** apodado **Fibonacci** publicó un libro llamado **Liber Abaci**, es decir libro sobre el ábaco, donde expone los conocimientos matemáticos del mundo árabe; con ese libro se inicia el renacimiento matemático del mundo occidental. En esta obra se encuentra el famoso problema de los conejos que dio origen a la sucesión de Fibonacci, el cual se fórmula a continuación:
>
> Determine el número de parejas de conejos que se tendrá al cabo de un año, sabiendo que se empieza con una sola pareja y que cada pareja engendra mensualmente otra pareja a partir de su segundo mes de vida.

## 7. TEOREMAS ADICIONALES

### 7.1 DE LA COMPRESIÓN (DE LAS SUCESIONES ENCAJADAS):

Dadas las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ tal que:

$$a_n \leq b_n \leq c_n \ ; \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$



Si $\text{Lím}(a_n) = \text{Lím}(c_n) = L$, entonces $\text{Lím}(b_n) = L$.

**7.2 DE LA MEDIA ARITMÉTICA:**

Dada una sucesión convergente $\{a_n\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = L$ entonces se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}(a_n) = L$$

**7.3 DE LA MEDIA GEOMÉTRICA:**

Dada una sucesión convergente $\{a_n\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = L$ entonces se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}(a_n) = L$$

**7.4 CRITERIO DE STOLZ – CESARO:**

Si las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ verifican una de las condiciones:

* $\{b_n\}$ es creciente con $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = \infty$
* $\{b_n\}$ es decreciente con $b_n \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \text{Lím}(b_n) = 0$.

Siempre que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}\right) = L,\ L \in \mathbb{R}$ o $L = \pm\infty$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}\right)$$

**Ejercicio 13:**

Dada la sucesión convergente $\{a_n\}$, donde: $a_n = \dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n}$

Determine el valor de convergencia.

***Resolución:***

Según la teoría se pide calcular el siguiente límite:

$$L = \lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n}\right)$$

Por el teorema de la media aritmética:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{1}{n}}\right)$$

Transformando convenientemente para aplicar la regla de L'Hôpital:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left[e^{\text{Ln}\left(n^{\frac{1}{n}}\right)}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[e^{\frac{\text{Ln}(n)}{n}}\right]$$

$$L = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\text{Ln}(n)}{n}\right]} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$L = e^{\frac{1}{\infty}} = e^{\circ} = 1$$

$\therefore$ El valor de convergencia de la sucesión es L = 1.

**Ejercicio 14:**

Determinar el valor de convergencia de la siguiente sucesión $\left\{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\sqrt[k]{k}}\right\}$.

***Resolución:***

Según la teoría se pide calcular el siguiente límite:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\sqrt[k]{k}}\right)$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\sqrt[1]{1}\cdot\sqrt[2]{2}\cdot\sqrt[3]{3}\ldots\sqrt[n]{n}}\right)$$

Por el teorema de la media geométrica:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)\to L=1$$

$\therefore$ La sucesión dada converge a L = 1.

**Ejercicio 15:**

Dada la sucesión $\{a_n\}$, tal que

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$$

Demostrar que $\lim_{n\to\infty}(a_n)=0$

***Resolución:***

Por condición tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}(|a_n|)=0$$

Multiplicando por –1 se tiene:

$$-\lim_{n\to\infty}(|a_n|)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}(-|a_n|)=0$$

Nótese que las sucesiones $\{|a_n|\}$ y $\{-|a_n|\}$ convergen a cero.

Según desigualdades podemos plantear:

$$-|a_n|\le a_n\le|a_n|$$

En el proceso de límite tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}(-|a_n|)\le\lim_{n\to\infty}(a_n)\le\lim_{n\to\infty}(|a_n|)$$

$$0\le\lim_{n\to\infty}(a_n)\le 0$$

Finalmente por el teorema de la compresión:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)=0$$

**Ejercicio 16:**

Calcular:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1+1^2}+\sqrt{2+2^2}+\ldots+\sqrt{n+n^2}}{n^2+2}\right)$$

***Resolución:***

$$a_n=\sqrt{1+1^2}+\sqrt{2+2^2}+\ldots\ldots+\sqrt{n+n^2}$$

$$a_{n+1}=\sqrt{1+1^2}+\sqrt{2+2^2}+\ldots\ldots+\sqrt{n+n^2}+\sqrt{(n+1)+(n+1)^2}$$

$$b_n=n^2+2\to b_{n+1}=(n+1)^2+2=n^2+2n+3$$

Nótese que $\{b_n\}$ es creciente y $\lim_{n\to\infty}(b_n)=\infty$, por tanto podemos aplicar el criterio de Stolz – Cesaro:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right)$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{(n+1)+(n+1)^2}}{2n+1}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2+3n+2}}{2n+1}\right)$$

Según propiedad para límites:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore L=\frac{1}{2}$$

## 8. SERIE DE NÚMEROS REALES

### 8.1 DEFINICIÓN

Consideremos la sucesión $\{a_n\}$, de elementos:

$$a_1\,;a_2\,;a_3\,;a_4;\ldots;a_n;\ldots$$

Si sumamos todos los elementos obtenemos una expresión de la forma:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + .... + a_n + ...$

que llamaremos serie infinita de la sucesión o simplemente serie.

Con mayor brevedad tenemos:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + .... + a_n + .... = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$$

**Ejercicio 17:**

Indicar las series para las siguientes sucesiones: $\left\{a_n = n^2\right\}$ y $\left\{b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$

***Resolución:***

Para la sucesión $\left\{a_n = n^2\right\}$ tenemos: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 + .... = \sum_{n=1}^{\infty}(n^2)$

Para la sucesión $\left\{b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ tenemos: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} + ... = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

## 8.2 SUMAS PARCIALES:

Sea la serie:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + .... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\right)$$

Se denomina suma parcial a cualquiera de la siguientes expresiones:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$\vdots$

$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ..... + a_{n-1}$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ..... + a_n$

$S_{n+1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ..... + a_{n+1}$

$\vdots$

En forma particular $S_n$ recibe el nombre de n–ésima suma parcial.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + .... + a_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k)$$

**8.2A) Teorema:**

Dada la sucesión $\{a_n\}$, respecto a su serie se cumple que:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(S_n)$$

**8.2B) PROPIEDAD:**

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ y su n–ésimo suma parcial.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Se cumple:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

**8.3 SERIE CONVERGENTE**

Si existe un número real S tal que $\text{Lím}(S_n) = S$, se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ es convergente y tiene suma S o que converge a S.

Si $\text{Lím}(S_n) = +\infty$ o $\text{Lím}(S_n) = -\infty$, se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ es divergente o que no tiene suma.

**Observación:**
A un nivel básico decimos que una serie puede ser convergente o divergente, esto es su caracter, y para aquellas convergentes a veces no se calcula la suma, solo se sabe que es convergente mediante la aplicación de cierto criterio.

**8.3A) Teorema de la Condición Necesaria:**

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ converge, entonces el término n–ésimo tiende a cero, esto es $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$.

**8.3B) Propiedad de la Condición Suficiente:**

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ si se cumple que $\lim_{n\to\infty}(a_n) \neq 0$, se afirma que dicha serie es divergente.

**8.4 PROPIEDADES DE LAS SERIES CONVERGENTES:**

Si las series $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n)$ son convergentes y c es un número real, entonces:

**8.4A)** La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ también es convergente y su suma viene dada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n) + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n)$$

**8.4B)** La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(c \cdot a_n)$ es convergente y se puede expresar de la manera siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c \cdot a_n) = c\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$$



**Ejercicio 18:**
Demostrar el teorema de la condición necesaria.

***Resolución:***

Sea la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ y su n–ésima suma parcial:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + .... + a_n$$

Como la serie es convergente, se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = S$$

Según la teoría considere también:

$$\lim_{n\to\infty}(S_{n-1}) = S$$

Por propiedad se sabe que:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

En el proceso de límite:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1})$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(S_n) - \lim_{n\to\infty}(S_{n-1})$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = S - S$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n) = 0 \cdot \text{Lqqd}$$

**Ejercicio 19:**

Respecto a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^4+n+1}{5n^4+1}\right)$ se afirma que:

A) Converge a 0
B) Converge a 1
C) Converge a $\frac{1}{5}$
D) Converge a 5
E) Diverge

***Resolución:***
El término n–ésimo de la serie es:

$$a_n = \frac{n^4+n+1}{5n^4+1}$$

En el proceso del límite.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4+n+1}{5n^4+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4}{5n^4}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} \neq 0$$

∴ Según la propiedad de la condición suficiente se concluye que la serie dada es divergente.

***Clave:* E**

## 9. SERIES NOTABLES

### 9.1 SERIE TELESCÓPICA:

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ se denomina serie telescópica si cada término se puede expresar como una diferencia de la forma $a_n = b_n - b_{n+1}$.

**9.1A) Teorema:**

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que $a_n = b_n - b_{n+1}$ ; $n \in \mathbb{Z}^+$.

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ converge si y solo si la sucesión $\{b_n\}$ converge, en cuyo caso tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n) = b_1 - L$$

donde $L = \lim_{n\to\infty}(b_n)$

### 9.2 SERIE GEOMÉTRICA:

La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(ar^n\right)$ se denomina serie geométrica, nótese que la serie inicia con n = 0

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(ar^n\right)=a+ar+ar^2+ar^3+....$$

Donde a es cualquier número real distinto de cero y r un número real fijo.

**9.2A) Teorema:**

Si $|r|<1$, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty}\left(ar^n\right)$ converge y su suma es $\dfrac{a}{1-r}$.

Si $|r|\geq 1$, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty}\left(ar^n\right)$ es divergente.

### 9.3 SERIE DE RIEMANN (SERIE P):

Se denomina así a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$, donde p es un número real fijo, es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^p}\right)=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+.....$$

**9.3A) Teorema:**

Si p > 1, la serie $\sum_{n=1}\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$ converge.

Si $p\leq 1$ la serie es divergente.

### 9.4 SERIE ARMÓNICA:

Es un caso especial de la serie de Riemann, ocurre cuando p = 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...$$

La serie armónica es divergente.

**Ejercicio 20:**

Calcular:

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+....$$

A) 1　　B) $\frac{1}{2}$　　C) $\frac{1}{6}$

D) $\frac{1}{3}$　　E) 2

***Resolución:***

La serie dada se puede reescribir así:

$$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+....$$

Nótese que:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+....+\frac{1}{(n)(n+1)}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(k)(k+1)}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

Aquí reconocemos que si $f(k)=\dfrac{1}{k}$, entonces $f(k+1)=\dfrac{1}{k+1}$.

Ahora según la propiedad telescópica:

$$S_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

En el proceso del límite $n\rightarrow\infty$:

$$\text{Lím}\left(S_n\right)=S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-0$$

$$\therefore\ S=1$$

***Clave: A***

**Ejercicio 21:**

Determine el valor de convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k^2-1}\right)$$

A) $\frac{7}{4}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

***Resolución:***

La serie dada se puede reescribir así:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2k+1)(2k-1)}\right]$$

Suponiendo que la serie es convergente procedemos a realizar transformaciones convenientes con la finalidad de aplicar la propiedad telescópica.

$$2S=2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2k+1)(2k-1)}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(2k+1)(2k-1)}\right]$$

$$2S=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\quad\begin{cases}\text{Si}\ \ f(k)=\dfrac{1}{2k-1}\\ \Rightarrow\ f(k+1)=\dfrac{1}{2k+1}\end{cases}$$

Según la propiedad telescópica: $2S=\frac{1}{2\cdot1-1}-\frac{1}{\infty}=1-0=1$

$$\therefore\ S=\frac{1}{2}$$

***Clave:* D**

**Ejercicio 22:**

Determine el valor de convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}\right]$$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

***Resolución:***

Para resolver este ejercicio procedemos de un modo similar que en el ejercicio anterior.

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}\right]\leftrightarrow 4S=4\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{(2n-1)(2n+3)}\right]$$

$$4S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right]$$

$$4S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

Según la propiedad telescópica:

$$4S=1-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{3}-\frac{1}{\infty}=1-0+\frac{1}{3}-0=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{3}$$

***Clave:*** **C**

**Ejercicio 23:**
Calcular:

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{8}}+\frac{1}{\sqrt[3]{16}}+\ldots$$

A) 1 B) $1+\sqrt[3]{2}$ C) $\sqrt[3]{2}$

D) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}$ E) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1}$

***Resolución:***
Sea S la suma límite, luego tenemos:

$$S=1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{8}}+\frac{1}{\sqrt[3]{16}}+\ldots$$

$$S=1+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^4+\ldots$$

Fácilmente podemos reconocer que estamos frente a una serie geométrica con $r=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, luego:

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}=\frac{1}{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}}}$$

$$\therefore\ S=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}$$

***Clave:*** **D**

**Ejercicio 24:**
Demostrar que la serie armónica es divergente.

***Resolución:***
Nótese que si se demuestra que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ es divergente

A continuación procedemos a un minucioso análisis:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n}$$

$$\overbrace{\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^n}}_{S_{2^n}}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}}^{S_n}$$

Al elegir la subsucesión $S_{2^n}$ y probar que $\lim_{n\to\infty}\left(S_{2^n}\right)=+\infty$ se puede concluir que $\lim_{n\to\infty}\left(S_n\right)=+\infty$.

Ahora se procede a plantear desigualdades convenientes:

$$1 \geq 1$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > \frac{4}{8}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\dots\dots\dots+\frac{1}{16} > \frac{8}{16}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2^{n-1}+1}+\dots\dots\dots\dots\dots\dots+\frac{1}{2^n} > \frac{2^{n-1}}{2^n}$$

Efectuando la adición verticalmente:

$$\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2^n}}_{S_{2^n}} > \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\dots+\frac{2^{n-1}}{2^n}$$

$$S_{2^n} > 1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots\dots+\frac{1}{2}}_{\text{"n" veces}}$$

$$S_{2^n} > 1+\left(\frac{1}{2}\right)\cdot n$$

En el proceso del límite.

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_{2^n}\right) = 1+\frac{1}{2}\cdot\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_{2^n}\right) = +\infty$$

Con lo cual se afirma que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_n\right) = +\infty$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ es divergente} \cdot \text{ Lqqd}$$

**Ejercicio 25:**

Determine el caracter de la serie:

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\dots..$$

***Resolución:***

La serie dada se puede reescribir así:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)$$

Nótese que estamos frente a una serie p, con $p = \frac{1}{3}$.

$\therefore$ La serie dada es divergente.

## 10. CRITERIOS DE CONVERGENCIA

### 10.1 DE COMPARACIÓN DIRECTA

Sea $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ una serie cuyo caracter queremos determinar.

**10.1A)** Elegimos la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n)$.

Si se cumple que $a_n \leq b_n$; $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, entonces podemos asegurar que $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ es convergente.

**10.1B)** Elegimos la serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n)$. Si se cumple que $a_n \geq c_n$; $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, entonces podemos asegurar que $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ es divergente.

**Ejercicio 26:**
Determine el caracter de la serie:

$$1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{4}}+\frac{1}{\sqrt[4]{5}}+\ldots$$

***Resolución:***
Fácilmente podeos reconocer que estamos frente a una serie p, con $p=\frac{1}{4}$, divergente.

A modo de aplicación para el criterio dado procedemos así:

$$1\geq 1$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}>\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}>\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{4}}>\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{5}}>\frac{1}{5}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

Al sumar verticalmente

$$1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{4}}+\ldots>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

Como el segundo miembro es la serie armónica, la cual es divergente, se concluye que la serie dada es divergente.

**Observación:** Para aplicar el criterio de comparación directa en el ejercicio anterior la serie propuesta fue comparada con la serie armónica, la practica determina que la aplicación de este criterio con frecuencia recurre como auxiliar a cierta serie p o cierta serie geométrica.

**10.2 DE COMPARACIÓN POR PASO AL LÍMITE**

Sea $\{b_n\}$ una sucesión de términos positivos tal que $\lim_{n\to\infty}(b_n)=b>0$.

**10.2A)** Si $b>0\wedge\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(a_nb_n)$ es convergente.

**10.2B)** Si $b>0\wedge\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ es divergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(a_nb_n)$ es divergente.

**Ejercicio 27:**
Determine el caracter de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n+3}{n^2(2n+1)}\right]$$

***Resolución:***
La serie dada se puede reescribir así:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)\right]$$

Supongamos que $a_n=\frac{1}{n^2}\wedge b_n=\frac{n+3}{2n+1}$

Nótese que:

$\lim_{n\to\infty}(b_n)=\frac{1}{2}>0\wedge\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n=\frac{1}{n^2}\right)$ es una serie de Riemann con p = 2 > 1, es decir convergente.

$\therefore$ La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n+3}{n^2(2n+1)}\right]$ es convergente.



### 10.3 DE LA RAÍZ O DE CAUCHY

Sea $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ una serie de términos no negativos, tal que $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a_n}\right)=L$.

**10.3A)** Si $L<1$, la serie dada es convergente.

**10.3B)** Si $L>1$, la serie dada es divergente.

**10.3C)** Si $L=1$, el criterio no dedice.

<u>**Ejercicio 28:**</u>
Determine el caracter de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+7}{n+4}\right)^n$$

***Resolución:***
Fácilmente podemos reconocer que:

$$a_n=\left(\frac{2n+7}{n+4}\right)^n \rightarrow \sqrt[n]{a_n}=\frac{2n+7}{n+4}$$

En el proceso de límite tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+7}{n+4}\right)=2>1$$

$\therefore$ La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ es divergente.

### 10.4 DE LA RAZÓN O DE D'ALEMBERT

Sea $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ una serie de términos positivos tal que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=L$

**10.4A)** Si $L<1$, la serie dada es convergente.

**10.4B)** Si $L>1$, la serie dada es divergente.

**10.4C)** Si $L=1$, el criterio no decide.

<u>**Ejercicio 29:**</u>
Determine el caracter de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n^3+10}}{e^n}\right)$$

***Resolución:***

Si $a_n=\frac{\sqrt{n^3+10}}{e^n}$, entonces:

$$a_{n+1}=\frac{\sqrt{(n+1)^3+10}}{e^{n+1}}$$

Según la teoría se plantea:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{\sqrt{(n+1)^3+10}}{e^{n+1}}}{\frac{\sqrt{n^3+10}}{e^n}}\right)$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{e}\cdot\sqrt{\frac{(n+1)^3+10}{n^3+10}}\right]$$

$$L=\frac{1}{e}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{(n+1)^3+10}{n^3+10}}$$

$$L=\frac{1}{e}\cdot\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^3+10}{n^3+10}\right]}$$

$$L=\frac{1}{e}\cdot\sqrt{1}=\frac{1}{e}\cdot 1=\frac{1}{e}<1$$

$\therefore$ La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ es convergente.

### 10.5 DE LA INTEGRAL

Sea $a_n = f(n)$, donde f(x) es positiva, decreciente y continua, para $x \geq 1$.

**10.5A)** Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ converge.

**10.5B)** Si $\int_1^{\infty} f(x)\cdot dx$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ diverge.

**Ejercicio 30:**

Dando uso del criterio de la integral pruebe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ es divergente.

***Resolución:***

Sea $f(x)=\frac{1}{x}$. Entonces $f(n)=\frac{1}{n}$.

Nótese que f(x) es positiva, decreciente y continua $\forall x \geq 1$, luego podemos aplicar el criterio de la integral.

$$\int_1^{\infty} f(x)\cdot dx = \int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \int_1^{R}\frac{dx}{x}$$

$$\int_1^{\infty} f(x)\cdot dx = \mathrm{Ln}(x)\Big]_1^{R} = \mathrm{Ln}(R)-\mathrm{Ln}(1)$$

$$\int_1^{\infty} f(x)\cdot dx = \mathrm{Ln}(R)-0=\mathrm{Ln}(R)$$

$$\int_1^{\infty} f(x)\cdot dx = \mathrm{Ln}(\infty)=\infty$$

Como la integral es divergente, la serie dada es divergente.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ es divergente}$$

**Ejercicio 31:**

Determine el caracter de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{Ln}(n+1)}{(n+1)^3}\right]$$

***Resolución:***

Sea $f(x)=\frac{\mathrm{Ln}(x+1)}{(x+1)^3}$; $x \geq 1$.

Ahora con el auxilio de la primera derivada veremos si f(x) es decreciente en $x \geq 1$,

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x+1}\cdot(x+1)^3-3(x+1)^2\cdot \mathrm{Ln}(x+1)}{(x+1)^6}$$

$$f'(x)=\frac{(x+1)^2-3(x+1)^2\cdot \mathrm{Ln}(x+1)}{(x+1)^6}$$

$$f'(x)=\frac{1-3\mathrm{Ln}(x+1)}{(x+1)^4}$$

Si $f'(x)<0 \Rightarrow 1-3\mathrm{Ln}(x+1)<0,\ \forall x \geq 1$

En efecto:

$$3\mathrm{Ln}(x+1)>1 \leftrightarrow \mathrm{Ln}(x+1)^3>\mathrm{Ln}(e)$$

$$(x+1)^3>e \leftrightarrow x+1>\sqrt[3]{e}$$

$$x>\sqrt[3]{e}-1 \leftrightarrow x>0{,}395$$

f(x) es decreciente para x > 0,395, por tanto es decreciente cuando $x \geq 1$.

Como la función es positiva, decreciente y continua $\forall x \geq 1$ podemos aplicar es criterio de la integral.

$$\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{Ln}(x+1)}{(x+1)^3}dx \quad \begin{cases}\mu=\mathrm{Ln}(x+1)\\ dv=\dfrac{dx}{(x+1)^3}\end{cases}$$

Integrando por partes:

$$\mu=\mathrm{Ln}(x+1)\rightarrow\frac{d\mu}{dx}=\frac{1}{x+1}$$

$$d\mu = \frac{1}{x+1}dx$$

$$dv = \frac{dx}{(x+1)^3} = (x+1)^{-3}dx$$

$$v = \frac{(x+1)^{-2}}{-2}$$

Ahora tenemos: $\int_1^{\infty} \mu \; dv = \mu v \Big]_1^{\infty} - \int_1^{\infty} v d\mu$

$$\int_1^{\infty} \frac{Ln(x+1)}{(x+1)^3}dx = Ln(x+1) \cdot \frac{(x+1)^{-2}}{-2}\Bigg]_1^{\infty} - \int_1^{\infty} \frac{(x+1)^{-2}}{-2} \cdot \frac{1}{x+1}dx$$

$$\int_1^{\infty} \frac{Ln(x+1)}{(x+1)^3}dx = -\frac{1}{2}Ln(x+1) \cdot \frac{1}{(x+1)^2}\Bigg]_1^{\infty} + \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)^3}dx$$

$$\int_1^{\infty} \frac{Ln(x+1)}{(x+1)^3}dx = -\frac{1}{2}Ln(x+1) \cdot \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}\Bigg]_1^{\infty}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{Ln(x+1)}{(x+1)^3}dx = 0 - \left[-\frac{1}{2}Ln(2) \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right]$$

$$\int_1^{\infty} \frac{Ln(x+1)}{(x+1)^3}dx = \frac{1}{8}Ln(2) + \frac{1}{16}$$

Nótese que la integral es convergente, luego la serie dada es convergente.

## 11. SERIES ALTERNADAS

### 11.1 DEFINICIÓN

Una serie se denomina alternada si sus términos alternan signos positivos y negativos en forma consecutiva.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

### 11.2 TEOREMA (REGLA DE LEIBNITZ)

Si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente con límite cero, esto es $Lím(a_n) = 0$, entonces la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ es convergente.

## 11.3 CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONVERGENCIA CONDICIONAL

**11.3A)** La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ es absolutamente convergente si $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ es convergente.

**11.3B)** La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ es condicionalmente convergente si $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ converge, pero $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ diverge.

## 11.4 EL CRITERIO DE LA RAZÓN

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ de términos $a_n$ no nulos. Se plantea que $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, entonces:

**11.4A)** Si $L < 1$, la serie es absolutamente convergente.

**11.4B)** Si $L > 1$, la serie es divergente

**11.4C)** Si $L = 1$, el criterio no decide

## 11.5 EL CRITERIO DE LA RAÍZ

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ de términos $a_n$ no nulos. Se plantea que $L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$, entonces:

**11.5A)** Si $L < 1$, la serie es absolutamente convergente.

**11.5B)** Si $L > 1$, la serie es divergente

**11.5C)** Si $L = 1$, el criterio no decide

**Ejercicio 32:**
Analizar el caracter de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]$$

***Resolución:***

Según la regla de Leibnitz $a_n = \frac{1}{n}$, nótese que la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es decreciente y tiene por límite cero.

Por lo tanto la serie dada es convergente.

**Ejercicio 33:**
Analizar el caracter de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{(-3)^{n-1}}\right]$$

***Resolución:***
Reescribiendo convenientemente la serie dada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{(-3)^{n-1}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{n}{3^{n-1}}$$

Nótese que si $a_n = \frac{n}{3^{n-1}}$, entonces se cumple que:

$$a_{n+1} < a_n;\ \forall n \geq 1$$

Luego la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente.

Además:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3^{n-1}}\right) = 0$$

Por lo tanto la serie dada es convergente.



## Ejercicio 34:

La serie dada:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n^3}{n^4+3}$$

¿Es absolutamente convergente o condicionalmente convergente?

***Resolución:***

Nótese que

$$a_n=\frac{n^3}{n^4+3}\quad\begin{cases}a_{n+1}<a_n\ ;\ \forall n\geq 2\\ \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=0\end{cases}$$

Con lo cual la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n^3}{n^4+3}$ es convergente.

Ahora con el valor absoluto para su término n–ésimo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\cdot\frac{n^3}{n^4+3}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3}{n^4+3}\right)$$

Según el criterio de comparación con paso por límite:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3}{n^4+3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^4}{n^4+3}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

Observa que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4}{n^4+3}\right)=1>0\wedge\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

es divergente, luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3}{n^4+3}\right)$ es divergente.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n^3}{n^4+3}$$

es condicionalmente convergente.

## Ejercicio 35:

Analizar el caracter de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-5)^{n-1}}{n\cdot n!}\right]$$

***Resolución:***

Sea $a_n=\frac{(-5)^{n-1}}{n\cdot n!}$, según el criterio de la razón:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-5)^n}{(n+1)\cdot(n+1)!}}{\frac{(-5)^{n-1}}{n\cdot n!}}\right|$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-5)\cdot n\cdot n!}{(n+1)(n+1)!}\right|$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{5n\cdot n!}{(n+1)\cdot(n+1)\cdot n!}\right]$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{5n}{(n+1)\cdot(n+1)}\right]=0<1$$

$\therefore$ La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-5)^{n-1}}{n\cdot n!}\right]$

Es absolutamente convergente.

## Ejercicio 36:

Determine el caracter de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{5n+3}{7n+2}\right)^n$$

***Resolución:***

Sea $a_n=(-1)^n\cdot\left(\frac{5n+3}{7n+2}\right)^n$, según el criterio de la raíz:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \cdot \left(\frac{5n+3}{7n+2}\right)^n\right|}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1) \cdot \left(\frac{5n+3}{7n+2}\right)\right|^n} = \lim_{n\to\infty} \left|(-1) \cdot \left(\frac{5n+3}{7n+2}\right)\right|$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n+3}{7n+2}\right) = \frac{5}{7} < 1$$

$\therefore$ La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{5n+3}{7n+2}\right)^n$ es absolutamente convergente

## 12. SERIES DE POTENCIAS

### 12.1 DEFINICIÓN

Una serie de potencias de centro c es una serie infinita de la forma:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \dots$$

donde x es una variable.

### 12.1A) Serie de Potencia en x

Si en la relación propuesta para F(x) hacemos c=0, tenemos una serie de potencia en x:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

### 12.2 TEOREMA

Sea la serie de potencias de centro c.

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \dots$$

La serie es absolutamente convergente si $|x-c| < R$ y es divergente cuando $|x-c| > R$.

**Observación:** El número $R > 0$ se llama radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

El intervalo de convergencia al cual pertenece x es uno de los siguientes $\langle C-R \,;\, C+R\rangle$, $[C-R \,;\, C+R\rangle$, $\langle C-R \,;\, C+R]$ ó $[C-R \,;\, C+R]$



**Ejercicio 37:**

Determine el intervalo de convergencia al cual debe pertenecer x en la siguiente serie convergente:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{3^n}\right)$$

***Resolución:***

La resolución del ejercicio involucra dos etapas bien definidas, veamos.

***Primera etapa***: Hallemos el radio de convergencia. Sea $a_n = \dfrac{x^n}{3^n}$. Ahora según el criterio de la razón:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}}\right|\left|\frac{3^n}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{3}\right| = \left|\frac{x}{3}\right|$$

Por condición se plantea:

$$L < 1 \leftrightarrow \left|\frac{x}{3}\right| < 1$$

$$\frac{|x|}{3} < 1 \leftrightarrow |x| < 3$$

Nótese que F(x) converge si $|x| < 3$. De forma similar se plantea $L > 1$ y se obtiene $|x| > 3$, quedando así establecido que el radio de convergencia es R = 3.

***Segunda etapa:*** Comprobación de los extremos.

El criterio de la razón no decide si $x = \pm 3$, por tal se debe comprobar estos casos directamente.

$$F(3) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^n}{3^n}\right) = 1+1+1+1+1+.....$$

$$F(-3) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-3)^n}{3^n}\right] = 1-1+1-1+1-1+.....$$

Nótese que ambas series son divergentes. Así concluimos que F(x) es convergente unicamente si $|x| < 3$.

$\therefore$ Intervalo de convergencia = $\langle -3 \,;\, 3\rangle$

Ejercicio 38:

¿Dónde es convergente la siguiente serie:

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n}\cdot(x-3)^n\,?$$

***Resolución:***

Sea $a_n=\dfrac{(-1)^n}{2^n\cdot n}\cdot(x-3)^n$.

Ahora se plantea:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)}\cdot\frac{2^n\cdot n}{(-1)^n\cdot(x-3)^n}\right|$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|-\frac{n\cdot(x-3)}{2(n+1)}\right|=|x-3|\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+2}\right)=|x-3|\cdot\frac{1}{2}$$

Por condición tenemos:

$|x-3|\cdot\dfrac{1}{2}<1\leftrightarrow|x-3|<2$

$-2<x-3<2\leftrightarrow 1<x<5$

Nótese que F(x) es absolutamente convergente en el intervalo abierto $\langle 1;5\rangle$ de radio R = 2 y centro C = 3. Veamos el comportamiento en los extremos:

$F(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^n\cdot n}\cdot(-2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, es divergente (serie armonica)

$F(5)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^n\cdot n}\cdot(2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$, es convergente (según la regla de Leibnitz)

$\therefore$ F(x) es convergente para x en el intervalo $\langle 1;\,5]$.

### 12.3 PROPIEDAD (Derivación e Integración término a término)

La siguiente propiedad establece que dentro del intervalo de convergencia se puede tratar una serie de potencias como si fuera un polinomio; es decir, se puede derivar e integrar término a término.

Sea la serie de potencias $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$, con radio de convergencia R > 0.



Entonces F(x) es derivable en $\langle C-R\,;C+R\rangle$ (o para todo x si $R=\infty$). Además, se puede integrar y derivar término a término si $x\in\langle C-R\,;C+R\rangle$.

$$F'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n(x-c)^{n-1}$$

$$\int F(x)dx = A+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} \quad .....(A \text{ constante})$$

Estas series tienen el mismo radio de convergencia R.

**12.4SERIE DE TAYLOR**

Sea la serie de potencias de centro c:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = F(x) = a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+a_3(x-c)^3+...$$

Los coeficientes $a_n$ se obtienen al derivar F(x) y evaluarlo en c.

$$F'(x)=a_1+2a_2(x-c)+3a_3(x-c)^2+... \qquad \Rightarrow F'(c)=a_1$$

$$F''(x)=2a_2+2.3a_3(x-c)+3.4a_4(x-c)^2+... \qquad \Rightarrow F''(c)=2a_2$$

$$F'''(x)=2.3a_3+2.3.4a_4(x-c)+3.4.5a_5(x-c)^2+... \qquad \Rightarrow F'''(c)=2.3a_3$$

$\vdots$

Fácilmente podemos reconocer que:

$$a_1=\frac{F'(c)}{1!}\ ;\ a_2=\frac{F''(c)}{2!}\ ;\ a_3=\frac{F'''(c)}{3!}\ ;\ ....$$

Ahora en la serie de potencias:

$$F(x)=F(c)+\frac{F'(c)}{1!}(x-c)+\frac{F''(c)}{2!}(x-c)^2+\frac{F'''(c)}{3!}(x-c)^3+...$$

Con mayor brevedad escribimos:

$$\boxed{F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F^{(n)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n}$$

relación matemática que llamaremos serie de Taylor.

**12.4A)Serie de Maclaurin**

Es un caso especial de la serie de Taylor, se presenta cuando hacemos c = 0, veamos:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\cdot x^n = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+...$$

## Ejercicio 39:

Halle la serie de Maclaurin de $f(x) = e^x$.

***Resolución:***

Según la teoría se plantea la relación: $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(c)}{3!}x^3 + ....$

Nótese que:

$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = f''''(x) = ....... = e^x$

Finalmente tenemos: $f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ....$

## Ejercicio 40:

Halle la serie de Maclaurin de $f(x) = \text{Sen}(x)$

***Resolución:***

Según la teoría se plantea la relación:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{'V}(0)}{4!}x^4 + ....$$

Ahora procedemos a derivar y evaluar la función dada:

$f(x) = \text{Sen}(x) \quad \rightarrow \quad f(0) = \text{Sen}(0) = 0$

$f'(x) = \text{Cos}(x) \quad \rightarrow \quad f'(0) = \text{Cos}(0) = 1$

$f''(x) = -\text{Sen}(x) \quad \rightarrow \quad f''(0) = -\text{Sen}(0) = 0$

$f'''(x) = -\text{Cos}(x) \quad \rightarrow \quad f'''(0) = -\text{Cos}(0) = -1$

$f^{'V}(x) = \text{Sen}(x) \quad \rightarrow \quad f^{'V}(0) = \text{Sen}(0) = 0$

$f^{V}(x) = \text{Cos}(x) \quad \rightarrow \quad f^{V}(0) = \text{Cos}(0) = 1$

$f^{V'}(x) = -\text{Sen}(x) \quad \rightarrow \quad f^{V'}(0) = -\text{Sen}(0) = 0$

$f^{V''}(x) = -\text{Cos}(x) \quad \rightarrow \quad f^{V''}(0) = -\text{Cos}(0) = -1$

$f^{V'''}(x) = \text{Sen}(x) \quad \rightarrow \quad f^{V'''}(0) = \text{Sen}(0) = 0$

$\vdots$

Finalmente tenemos:

$$f(x) = \text{Sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - .....$$



## 13. PROGRESIÓN ARITMÉTICA (P.A)

### 13.1 DEFINICIÓN

La sucesión $\{a_n\}$ definida por el primer elemento $a_1$ y por la relación recurrente $a_{n+1} = a_n + r$, $n \in \mathbb{Z}^+$, donde r es un número constante, se denomina progresión aritmética.

El número r se llama razón de la progresión aritmética.

### 13.1A) REPRESENTACIÓN

$\div\, a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot a_n$

$\div\, a_1 \cdot (a_1 + r) \cdot (a_1 + 2r) \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot a_1 + (n-1)r$

Donde:

$\div$ = Inicio de la P.A.

• = Separación de términos

$a_1$ = Primer término

$a_n$ = Término n–ésimo (Término general)

n = Número de términos

r = Razón de la P.A.

### 13.2 CLASES DE PROGRESIONES

Según la definición $a_{n+1} = a_n + r$, luego es evidente que $r = a_{n+1} - a_n$. Por lo tanto:

**13.2A)** Si $r > 0$, es decir $a_{n+1} > a_n$; $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, la P.A. es creciente.

**13.2B)** Si $r = 0$, es decir $a_{n+1} = a_n$; $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, la P.A. es estacionaria (constante)

**13.2C)** Si $r < 0$, es decir $a_{n+1} < a_n$; $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, la P.A. es decreciente.

### 13.3 PROPIEDADES

Sea la progresión aritmética

$$\div\, a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots\ldots \cdot a_k \cdot \ldots\ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

**13.3A) Razón (R)**

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_k - a_{k-1} = \ldots = a_n - a_{n-1}$$

### 13.3B) Término General ($a_n$)

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

### 13.3C) Términos Equidistantes de los Extremos ($a_p \wedge a_q$)

$$\div\, \underbrace{a_1 \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot a_p}_{\text{"x" términos}} \cdot \ldots\ldots \underbrace{a_q \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot a_n}_{\text{"x" términos}}$$

$$a_p + a_q = a_1 + a_n$$

### 13.3D) Término Central ($a_c$)

Siendo «n» impar tenemos: $$a_c = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

### 13.3E) Suma de los n primeros Términos ($S_n$)

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \cdot n \;\vee\; S_n = \left[\frac{2a_1 + (n-1)r}{2}\right] \cdot n$$

## 13.4 MEDIOS ARITMÉTICOS

### 13.4A) Definición:

Son los términos de una P.A. comprendidos entre sus extremos (Primer y último término)

$$\div\, a_1 \cdot \underbrace{a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot a_{n-3} \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1}}_{\text{Medios aritméticos}} \cdot a_n$$

### 13.4B) INTERPOLACIÓN DE MEDIOS ARITMÉTICOS

Es el proceso que consiste en formar una P.A. conociendo los extremos y el número de medios a interpolar.

$$\div\, a \cdot \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{"x" medios}} \cdot b$$

Según la fórmula del término general:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$b = a + (x+2-1)r$$

$$b - a = (x+1)r$$

$$(x+1)r = b - a$$

$$r = \frac{b-a}{x+1}$$

r = Razón de interpolación

## 13.5 REGLAS ADICIONALES

### 13.5A) ALTERACIÓN DE LOS TÉRMINOS DE UNA P.A

**Primera:** Si se suma o resta a todos los elementos de una P.A. una misma cantidad, se tendrá otra P.A. cuya razón será igual a la razón de la P.A. original.

**Segunda:** Si se mutiplica o divide a todos los elementos de una P.A. por una misma cantidad diferente de cero, se obtiene otra P.A. cuya razón será la original multiplicada o dividida por dicha cantidad.

### 3.5B) OTROS EQUIVALENTES PARA $a_c$ y $n$

Dada la progresión aritmética de n (impar) términos:

$\div\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$

Suponiendo que:

$S_I$ = Suma de términos que ocupan lugar impar

$S_p$ = Suma de términos que ocupan lugar par

Nótese que:

$S_I = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots\ldots\ldots + a_n$

$S_p = a_2 + a_4 + a_6 + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}$

$S_n = S_I + S_p$

Para el término central $(a_c)$:

$$a_c = S_I - S_p = \frac{S_I + S_p}{n} = \frac{S_n}{n}$$

Para el número de términos $(n)$:

$$n = \frac{S_I + S_p}{S_I - S_p}$$

**Ejercicio 41:**

En una progresión aritmética de 21 términos se sabe que:

$$\begin{cases} a_4 + a_5 = 55 \\ a_3 + a_{10} = 83 \end{cases}$$

Determine la suma de todos sus términos.

A) 1562 B) 1624 C) 1533 D) 1582 E) 1634

***Resolución:***
Según el término general, el sistema dado se puede reescribir así:

$$\begin{cases}(a_1+3r)+(a_1+4r)=55\\(a_1+2r)+(a_1+9r)=83\end{cases}$$

$$\begin{cases}2a_1+7r=55..................(1)\\2a_1+11r=83.................(2)\end{cases}$$

Efectuando (2) – (1):

$$11r-7r=83-55\leftrightarrow 4r=28$$
$$r=7$$

Reemplazando r = 7 en (1):

$$2a_1+49=55\ \leftrightarrow 2a_1=6$$
$$a_1=3$$

Según la fórmula para sumar los «n» primeros términos:

$$S_n=\left[\frac{2a_1+(n-1)r}{2}\right]\cdot n$$

$$S_{21}=\left(\frac{2\cdot 3+20\cdot 7}{2}\right)\cdot 21$$

$$S_{21}=\left(\frac{146}{2}\right)\cdot 21=73\cdot 21$$

$$\therefore\ S_{21}=1533$$

***Clave:*** **C**

**Ejercicio 42:**
Determinar la razón para interpolar 25 medios aritméticos entre 2 y 106.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

***Resolución:***
Del enunciado se plantea:

$$\div\, 2\cdot\underbrace{.........................}_{25\text{ medios}}\cdot 106$$

Según la fórmula de la razón para la interpolación:

$$r=\frac{106-2}{25+1}=\frac{104}{26}$$
$$\therefore\ r=4$$

***Clave:*** **C**

## 14. PROGRESIÓN ARMÓNICA (P.H)

### 14.1 DEFINICIÓN

Una progresión armónica es la sucesión que se caracteriza porque sus términos son los reciprocos de los términos de una progresión aritmética.
Dada la progresión aritmética:

$$\div\ a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot ................\cdot a_n$$

Con $a_k\neq 0$ ; $\forall\ k\in\mathbb{Z}^+\ |1\leq k\leq n$, luego la progresión armónica está dada por la sucesión.

$$\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_3},\frac{1}{a_3},..........,\frac{1}{a_n}$$

**Ejercicio 43:**

Si $\frac{2}{7}$, a – 1, $\frac{5}{2}$ son tres términos consecutivos de una progresión armónica. ¿Cuál es el valor que asume a?

A) 12 B) $\frac{29}{13}$ C) $\frac{41}{37}$
D) $\frac{59}{39}$ E) $\frac{61}{41}$

***Resolución:***
Según la definición la progresión aritmética que se forma es:

$$\div\ \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{a-1}\cdot\frac{2}{5}$$



Ahora por término central:

$$\frac{1}{a-1}=\frac{\frac{7}{2}+\frac{2}{5}}{2}\leftrightarrow\frac{1}{a-1}=\frac{39}{20}$$

$$a-1=\frac{20}{39}\leftrightarrow a=\frac{20}{39}+1$$

$$\therefore\ a=\frac{59}{39}$$

***Clave:* D**

## 15. PROGRESIÓN GEOMÉTRICA (P.G)

### 15.1 DEFINICIÓN

La sucesión $\{t_n\}$ definida por el primer término $t_1$ y por la relación recurrente $t_{n+1}=t_n\cdot q$, donde q es un número constante $(q\neq 0)$ se llama progresión geométrica.
El número **q** se llama razón de la progresión geométrica.

### 15.1A) REPRESENTACIÓN

$$\div\!\div\ t_1 : t_2 : t_3 : \ldots\ldots\ldots : t_n$$

$$\div\!\div\ t_1 : t_1q : t_1q^2 : \ldots\ldots\ldots : t_1q^{n-1}$$

Donde:
$\div\!\div$ = Inicio de la P.5
: = Separación de términos
$t_1$ = Primer término
$t_n$ = Término n–ésimo (Término general)
n = Número de términos
q = Razón de la P.G.

### 15.2 CLASES DE PROGRESIONES

**15.2A)** Si q > 1, la P.G es creciente

**15.2B)** Si 0 < q < 1, la P.G es decreciente

**15.2C)** Si q < 0, la P.G es alternante

### 15.3 PROPIEDADES

Sea la progresión geométrica

$$\div\!\div\ t_1 : t_2 : t_3 : \ldots\ldots : t_k : \ldots\ldots\ldots : t_{n-1} : t_n$$

**15.3A)** Razón (q)

$$q=\frac{t_2}{t_1}=\frac{t_3}{t_2}=\ldots\ldots=\frac{t_k}{t_{k-1}}=\ldots\ldots=\frac{t_n}{t_{n-1}}$$

**15.3B)** Término General $(t_n)$

$$t_n=t_1\cdot q^{n-1}$$

**15.3C)** Términos equidistantes de los extremos $(t_a \wedge t_b)$

$$\div\!\div\ \underbrace{t_1 : \ldots\ldots : t_a}_{\text{"x" términos}} : \ldots\ldots : \underbrace{t_b : \ldots\ldots : t_n}_{\text{"x" términos}}$$

$$t_a\cdot t_b=t_1\cdot t_n$$

**15.3D)** Término Central $(t_c)$

Siendo «n» impar tenemos:

$$t_c=\sqrt{t_1\cdot t_n}$$

**15.3E)** Suma de los n primeros términos $(S_n)$.

$$S_n=t_1\cdot\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right);\ q\neq 1$$

**15.3F)** Suma Límite $(S_{Lím})$

Si la progresión geométrica tiene infinitos términos se cumple que:

$$S_{Lím}=\frac{t_1}{1-q};\ -1<q<1$$

**15.3G)** Producto de los n primeros términos $(P_n)$

Suponiendo que $P_n$ es el producto de los «n» primeros términos de una P.G de términos positivos, se cumple:

$$P_n = \sqrt{(t_1 \cdot t_n)^n}$$

## 15.4 MEDIOS GEOMÉTRICOS

### 15.4A) DEFINICIÓN

Son los términos de una P.G. comprendidos entre sus extremos (Primer y Ùltimo término)

$$\div\div t_1 : \underbrace{t_2 : t_3 : \ldots\ldots : t_{n-3} : t_{n-2} : t_{n-1}}_{\text{Medios geométricos}} : t_n$$

### 15.4B) INTERPOLACIÓN DE MEDIOS GEOMÉTRICOS

Es el proceso que consiste en formar una P.G. conociendo los extremos y el número de medios a interpolar:

$$\div\div a : \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{"x" medios}} : b$$

Según la fórmula del término general:

$$t_n = t_1 \cdot q^{n-1}$$

$$b = a \cdot q^{x+2-1}$$

$$a \cdot q^{x+1} = b$$

$$q^{x+1} = \frac{b}{a}$$

$$q = \sqrt[x+1]{\frac{b}{a}}$$

q = Razón de interpolación

## 15.5 REGLAS ADICIONALES

### 15.5 A) ALTERACIÓN DE LOS TÉRMINOS DE UNA P.A.

**Primera:** Si se multiplica o divide a todos los elementos de una P.G. por una misma cantidad diferente de cero, los elementos resultantes forman otra P.G, pero de la misma razón.

**Segunda:** Si a los elementos de una P.G. se potencian o radican, los elementos resultantes forman otra P.G cuya razón estará afectada por la operación correspondiente.

**Tercera:** Los reciprocos de los elementos de una P.G forman otra P.G, cuya razón es la reciproca de la anterior.

### 15.5 B) OTRO EQUIVALENTE PARA $t_c$

Dada la progresión geométrica de n (impar) términos.

$$\div\div t_1 : t_2 : t_3 : t_4 : t_5 : t_6 : \ldots\ldots : t_{n-1} : t_n$$

Suponiendo que:

$P_I$ = Producto de términos que ocupan lugar impar.

$P_p$ = Producto de términos que ocupan lugar par.

Nótese que:

$$P_I = t_1 \cdot t_3 \cdot t_5 \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot t_n$$

$$P_p = t_2 \cdot t_4 \cdot t_6 \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot t_{n-1}$$

$$P_n = P_I \cdot P_p$$

$$t_c = \frac{P_I}{P_p} = \sqrt[n]{P_I \cdot P_p} = \sqrt[n]{P_n}$$



**Ejercicio 44:**
De una progresión geométrica que no es creciente se sabe que:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 6 \\ t_5 + t_6 + t_7 = 96 \end{cases}$$

Determine la suma de sus siete primeros términos.

A) 92 B) 86 C) 82
D) 96 E) 74

***Resolución:***
Según el término general el sistema dado se puede reescribir así:

$$\begin{cases} t_1 + t_1q + t_1q^2 = 6 \\ t_1q^4 + t_1q^5 + t_1q^6 = 96 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 \cdot (1+q+q^2) = 6 \text{ ......................(1)} \\ t_1q^4 \cdot (1+q+q^2) = 96 \text{ ...............(2)} \end{cases}$$

Efectuando $(2) \div (1)$:

$$\frac{t_1q^4}{t_1} = \frac{96}{6} \leftrightarrow q^4 = 16$$

Aquí reconocemos que $q = 2 \vee q = -2$, como la P.G no es creciente aceptamos $q = -2$.

Reemplazando $q = -2$ en (1)

$$t_1 \cdot (1-2+4) = 6 \leftrightarrow 3t_1 = 6$$
$$t_1 = 2$$

Según la fórmula para sumar los «n» primeros términos:

$$S_n = t_1 \cdot \left( \frac{q^n - 1}{q-1} \right)$$

$$S_7 = 2 \cdot \left[ \frac{(-2)^7 - 1}{-2-1} \right]$$

$$S_7 = 2 \cdot \left( \frac{-129}{-3} \right) = 2 \cdot (43)$$

$$\therefore \ S_7 = 86$$

***Clave:* B**

**Ejercicio 45**
La suma de los términos de una progresión geométrica de infinitos términos es 8 y la suma de los cuadrados de sus términos es 32. Determine el primer término.

A) 4 B) $\frac{15}{4}$ C) 6

D) $\frac{16}{3}$ E) 2

***Resolución:***
Según el enunciado planteamos dos progresiones geométricas de infinitos términos, donde $-1 < q < 1$.

$$\div\div \ t_1 : t_1q : t_1q^2 : \text{.....}$$

$$\div\div \ t_1^2 : t_1^2q^2 : t_1^2q^4 : \text{.....}$$

Por condición tenemos:

$$\frac{t_1}{1-q} = 8 \leftrightarrow t_1 = 8(1-q) \text{..............(1)}$$

$$\frac{t_1^2}{1-q^2} = 32 \leftrightarrow t_1^2 = 32\left(1-q^2\right) \text{.......(2)}$$

Reemplazando (1) en (2):

$$\left[8(1-q)\right]^2 = 32\left(1-q^2\right) \ ; \ q \neq 1$$

$$64(1-q)(1-q) = 32(1-q)(1+q)$$

$$2(1-q) = 1+q \leftrightarrow q = \frac{1}{3}$$

Reemplazando $q = \frac{1}{3}$ en (1):

$$t_1 = 8\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore \ t_1 = \frac{16}{3}$$

***Clave:* D**

## 16. PROGRESIONES ESPECIALES

### 16.1 PROGRESIÓN ARITMÉTICA DE ORDEN SUPERIOR (P.A.O.S)

#### 16.1A)DEFINICIÓN

Es aquella sucesión en la que su término n–ésimo es un polinomio en «n» cuyo grado es mayor o igual que dos.

Sea la sucesión:

$$\{a_n\} = a_1 , a_2 , a_3 ; a_4 , a_5 , .........$$

$$^{1}\triangle_1 \quad ^{1}\triangle_2 \quad ^{1}\triangle_3 \quad ^{1}\triangle_4$$

$$^{2}\triangle_1 \quad ^{2}\triangle_2 \quad ^{2}\triangle_3$$

$$^{3}\triangle_1 \quad ^{3}\triangle_2 \ ....$$

Donde:

$^{1}\triangle_1 = a_2 - a_1$ ; $^{1}\triangle_2 = a_3 - a_2$ ; $^{1}\triangle_3 = a_4 - a_3$ ; ....

$^{2}\triangle_1 = {}^{1}\triangle_2 - {}^{1}\triangle_1$ ; $^{2}\triangle_2 = {}^{1}\triangle_3 - {}^{1}\triangle_2$ ; $^{2}\triangle_3 = {}^{1}\triangle_4 - {}^{1}\triangle_3$ ;....

$^{3}\triangle_1 = {}^{2}\triangle_2 - {}^{2}\triangle_1$ ; $^{3}\triangle_2 = {}^{2}\triangle_3 - {}^{2}\triangle_2$ ; ....

Siendo:

$a_1$ = Primer término

$a_n$ = Término de lugar «n»

$^{1}\triangle_1$ = Primera diferencia de primer orden

$^{2}\triangle_1$ = Primera diferencia de segundo orden

$^{k}\triangle_1$ = Primera diferencia de k–ésima orden.

Las diferencias se calculan hasta obtener un resultado igual que cero.

#### 16.1B)FÓRMULA PARA EL TÉRMINO DE LUGAR «n»

$$a_n = a_1 + {}^{1}\triangle_1 C_1^{n-1} + {}^{2}\triangle_1 C_2^{n-1} + {}^{3}\triangle_1 C_3^{n-1} + ....$$



### 16.1C)SUMA DE LOS «n» PRIMEROS TÉRMINOS

$$S_n = a_1 C_1^n + {}^1\triangle_1 C_2^n + {}^2\triangle_1 C_3^n + {}^3\triangle_1 C_4^n + \ldots$$

## 16.2 PROGRESIÓN HIPERGEOMÉTRICA (P.H.G)

### 16.2A)DEFINICIÓN

Es aquella sucesión en la que dos términos consecutivos; $a_n \wedge a_{n+1}$ verifican la siguiente relación:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma} \ ; \ \alpha \neq 0$$

**Observación:** Si $\alpha = 0$, se reduce a una progresión geométrica.

### 16.2B)SUMA DE LOS «n» PRIMEROS TÉRMINOS

$$S_n = \frac{(n\alpha + \beta)a_n - \gamma a_1}{\alpha + \beta - \gamma}$$

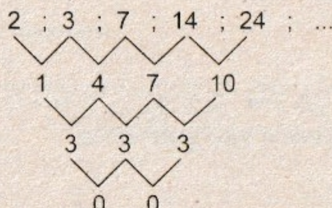
**Ejercicio 46:**
Considere la siguiente progresión aritmética de orden superior:

$$2 \ ; \ 3 \ ; \ 7 \ ; \ 14 \ ; \ 24 \ ; \ldots$$

¿Cuál es su orden?

***Resolución:***
Para determinar el orden de la progresión debemos realizar las diferencias correspondientes, así una progresión será de primer orden si las primeras diferencias son todas iguales a una constante no nula, la progresión será de segundo orden si las segundas diferencias son todas iguales a una constante no nula, etc.

Así tenemos:




Nótese que las primeras diferencias son:

${}^1\triangle_1 = 1 \ ; \ {}^1\triangle_2 = 4 \ ; \ {}^1\triangle_3 = 7 \ ; \ {}^1\triangle_4 = 10 \ ; \ldots$

Así mismo las segundas diferencias son:

${}^{2}\triangle_1 = {}^{2}\triangle_2 = {}^{2}\triangle_3 = 3$ que resulta una constante no nula.

$\therefore$ La progresión aritmética es de segundo orden

**Ejercicio 47:**

Con respecto al ejercicio anterior. Determine una fórmula para el término n–ésimo.

***Resolución:***

La fórmula del n–ésimo término de una progresión aritmética de orden superior se determina por la relación:

$$a_n = a_1 + {}^{1}\triangle_1 C_1^{n-1} + {}^{2}\triangle_1 C_2^{n-1} + {}^{3}\triangle_1 C_3^{n-1} + ....$$

Para la P.A.O.S se tiene:

$a_1 = 2 \ ; \ 3 \ ; \ 7 \ ; \ 14 \ ; \ 24 \ ; ...$

${}^{1}\triangle_1 = 1 \ ; \ 4 \ ; \ 7 \ ; \ 10$

${}^{2}\triangle_1 = 3 \ ; \ 3 \ ; \ 3$

${}^{3}\triangle_1 = 0 \ ; \ 0$

Ahora en la relación tenemos:

$$a_n = 2 + (1)C_1^{n-1} + (3)C_2^{n-1} + (0)C_3^{n-1}$$

$$a_n = 2 + n - 1 + 3 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 0$$

$$a_n = n + 1 + \frac{3(n^2 - 3n + 2)}{2} = \frac{2n + 2 + 3n^2 - 9n + 6}{2}$$

$$\therefore \ a_n = \frac{3n^2 - 7n + 8}{2}$$

**Ejercicio 48:**

Dada la sucesión:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}; \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}; \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}; .....; \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$$

Demostrar que es una progresión hipergeométrica

***Resolución:***

Recordemos que la suceción $\{a_n\}$ es una progresión hipergeométrica si el cociente de dos términos consecutivos verifica la siguiente relación:



$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma}\ ;\ \alpha\neq 0\ ,\ n\in\mathbb{Z}^+ \quad ....(1)$$

En nuestro caso tenemos:

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Nótese que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}}{\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+3}$$

Al comparar (1) con (2) se observa que $\alpha=1;\ \beta=0\wedge\gamma=3$.

Por tanto queda demostrado que la progresión es hipergeométrica.

## Ejercicio 49:

Con respecto al ejecicio anterior. Determine la suma de sus «n» primeros términos.

***Resolución:***

La suma de los «n» primeros términos de una progresión hipergeométrica se determina mediante la fórmula:

$$S_n=\frac{(n\alpha+\beta)a_n-\gamma a_1}{\alpha+\beta-\gamma} \quad ..........(1)$$

Según el ejercicio anterior:

$$\alpha=1\ ;\ \beta=0\ ;\ \gamma=3\wedge a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Ahora reemplazando en (1) tenemos:

$$S_n=\frac{(n)\cdot\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}-(3)\cdot\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}}{1+0-3}$$

$$S_n=\frac{\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}-\dfrac{1}{2}}{-2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

**Ejercicio 50:**

Con respecto al ejercicio anterior. ¿Es la sucesión $\{S_n\}$ convergente?

***Resolución:***

Nótese que $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

Ahora se plantea:

$$L = \lim_{n\to\infty}(S_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}\right]$$

$$L = \frac{1}{4} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ Como $L \in \mathbb{R}$, la sucesión $\{S_n\}$ es convergente y converge a $\frac{1}{4}$

**Ejercicio 51:**

Calcular:

$$S = \frac{2}{3} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 4\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \ldots.$$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 3 E) 5

***Resolución:***

$\forall x \in \langle -1;1 \rangle$, se cumple que:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots. = \frac{1}{1-x}$$

Al derivar a cada miembro tenemos:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots. = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Multipicando cada miembro por x:

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 \ldots. = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Con mayor brevedad presentamos:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\left(k \cdot x^k\right) = \frac{x}{(1-x)^2}}$$

En nuestro ejercicio tenemos:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{\frac{2}{3}}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}}$$

$$\therefore S = 6$$

# Problemas Resueltos

## Problema 01

Determine el valor de convergencia de:

$$\left\{\frac{12}{4};\frac{24}{7};\frac{44}{12};\frac{72}{19};....\right\}$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 7

***Resolución:***

Debemos determinar la forma del término general; para ello analizaremos los términos del numerador:

$$\begin{array}{llllllll} a \longrightarrow & 12 & ; & 24 & ; & 44 & ; & 72 .... \\ \Delta_1 \longrightarrow & & 12 & & 20 & & 28 & \\ \Delta_2 \longrightarrow & & & 8 & & 8 & & \\ \Delta_3 \longrightarrow & & & & 0 & & & \end{array}$$

Como la última diferencia es cero; la fórmula es polinómica y está dada por:

$$a_n = a_1 + \Delta_1 C_1^{n-1} + \Delta_2 C_2^{n-1}$$

Remplazando:

$$a_n = 12 + 12\frac{(n-1)}{1!} + 8\frac{(n-1)(n-2)}{2!}$$

Efectuando:

$$a_n = 4n^2 + 8$$

El mismo análisis para el denominador:

$$b_n = 4 + 3C_1^{n-1} + 2C_2^{n-1}$$

$$b_n = 4 + \frac{3(n-1)}{1!} + 2\frac{(n-1)(n-2)}{2!} \rightarrow b_n = n^2 + 3$$

Entonces la sucesión es:

$$\left\{\frac{4n^2+8}{n^2+3}\right\}$$

Tomando límite al término general:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4n^2+8}{n^2+3}\right] = 4$$

∴ La sucesión converge a 4

***Clave:*** C

## Problema 02

Dada la sucesión $\{0 ; 0 ; 6 ; 18 ; 36 ;...\}$ determinar el lugar que ocupa el número 216.

A) 7 B) 9 C) 10
D) 12 E) 15

***Resolución:***

Para ver si los términos corresponden a una progresión aritmética de orden superior; calculemos las diferencias sucesivas.

$$\begin{array}{llllllllll} a_1 \longrightarrow & 0 & ; & 0 & ; & 6 & ; & 18 & ; & 36 \\ \Delta_1 \longrightarrow & & 0 & & 6 & & 12 & & 18 & \\ \Delta_2 \longrightarrow & & & 6 & & 6 & & 6 & & \\ & & & & 0 & & 0 & & & \end{array}$$

Como las últimas diferencias son nulas; la fórmula es polinómica:

$$a_n = 0 + 0C_1^{n-1} + 6C_2^{n-1} \rightarrow a_n = 6\frac{(n-1)(n-2)}{2!}$$

$$a_n = 3(n-1)(n-2)$$

Nos piden el lugar del término cuyo valor es 216; entonces:

$$216 = 3(n-1)(n-2) \rightarrow 72 = (n-1)(n-2)$$

Como los factores son consecutivos:

$$9 \cdot 8 = (n-1)(n-2)$$

$$n-1 = 9 \rightarrow n = 10$$

$\therefore$ El lugar pedido es 10

***Clave:* C**

## Problema 03

Dada la sucesión $\{a_n\}$ tal que:

$$a_n \begin{cases} \dfrac{5n^2+n-1}{2n^2+3n+1} & ; \text{ si n es par} \\ \dfrac{\lambda n+3}{4n+6} & ; \text{ si n es impar} \end{cases}$$

Si dicha sucesión es convergente. Calcular:

$$E = 1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3$$

A) 15 B) 156 C) 400
D) 820 E) 1111

***Resolución:***

Como la sucesión es convergente; el límite de las subsucesiones deben ser iguales; entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{5n^2+n-1}{2n^2+3n+1}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda n+3}{4n+6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{2} = \frac{\lambda}{4} \rightarrow 10 = \lambda$$

Nos piden:

$$E = 1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3$$

Reemplazando:

$$E = 1+10+10^2+10^3$$

$$\therefore\ E = 1111$$

***Clave:* E**

## Problema 04

Calcular el valor de convergencia de la siguiente sucesión:

$$\{a_n\} = \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^4;\left(\frac{3}{4}\right)^5;\left(\frac{4}{5}\right)^6;\left(\frac{5}{6}\right)^7;....\right\}$$

***Nota:*** **e** es el número de Napier

A) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$ B) $\dfrac{1}{e}$ C) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

D) $\dfrac{1}{e^2}$ E) $\dfrac{1}{3}$

***Resolución:***

Se observa que el término general es de la forma:

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3}$$

Tomando límite al término general; este adopta la forma $1^\infty$:

Dando uso del teorema:

$$\text{Lim } a_n^{b_n} = e^{\text{lím}(a_n-1)b_n} \text{ ; cuando:}$$

$$\text{Lim}(a_n) = 1 \ \wedge \ \text{Lim}(b_n) = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}-1\right)(n+3)}$$

$$L = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-n-3}{n+2}\right)} = e^{-1}$$

La sucesión converge al valor:

$$L = \frac{1}{e}$$

***Clave:* B**

## Problema 05

Determine el valor de la convergencia de la sucesión:

$$\{a_n\} ; a_n = n\left(\sqrt{2n^2+3}-\sqrt{2n^2+1}\right)$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$   B) $\sqrt{2}$   C) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$   D) $2\sqrt{2}$   E) $\frac{5}{2}\sqrt{2}$

***Resolución:***

Como nos piden la convergencia:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{2n^2+3}-\sqrt{2n^2+1}\right)$$

Nótese que la forma es $\infty(\infty-\infty)$

Debemos transformar $a_n$ para ello racionalizaremos:

$$a_n = \frac{n\left(\sqrt{2n^2+3}-\sqrt{2n^2+1}\right)\left(\sqrt{2n^2+3}+\sqrt{2n^2+1}\right)}{\sqrt{2n^2+3}+\sqrt{2n^2+1}}$$

Por diferencia de cuadrados:

$$a_n = \frac{n\left[\left(2n^2+3\right)-\left(2n^2+1\right)\right]}{\sqrt{2n^2+3}+\sqrt{2n^2+1}} \Leftrightarrow a_n = \frac{2n}{\sqrt{2n^2+3}+\sqrt{2n^2+1}}$$

Tomando límites:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n}{\sqrt{2n^2+3}+\sqrt{2n^2+1}}\right]$$

Dividiendo por n al numerador y denominador:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{2+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}\right]$$

Evaluando:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \frac{2}{\sqrt{2+0}+\sqrt{2+0}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore$ La sucesión converge a $\frac{\sqrt{2}}{2}$

*Clave:* **A**

## Problema 06

Calcule el valor de convergencia de la sucesión:

$$\left\{\frac{1^3+2^3+3^3+....+n^3}{(2n+1)^2(3n-1)^2}\right\}$$

A) 24 B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{144}$

D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{3}{17}$

***Resolución:***

Sea: $a_n=\dfrac{1^3+2^3+3^3+....+n^3}{(2n+1)^2(3n-1)^2}$;

recordando que:

$$1^3+2^3+3^2+....+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Reemplazando:

$$a_n=\frac{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}{(2n+1)^2(3n-1)^2}=\left[\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{(2n+1)(3n-1)}\right]^2$$

Efectuando operaciones:

$$a_n=\left[\frac{n^2+n}{12n^2+2n-2}\right]^2$$

Como nos piden la convergencia de la sucesión; tomamos límites.

$$\underset{n\to\infty}{\text{Lím}}(a_n)=\underset{n\to\infty}{\text{lím}}\left[\frac{n^2+n}{12n^2+2n-2}\right]^2$$

Por propiedad de límites:

$$\underset{n\to\infty}{\text{Lím}}(a_n)=\left[\underset{n\to\infty}{\text{Lím}}\left(\frac{n^2+n}{12n^2+2n-2}\right)\right]^2$$

Como los grados del numerador y denominador son iguales; entonces:

$$\underset{n\to\infty}{\text{Lím}}(a_n)=\left(\frac{1}{12}\right)^2\rightarrow\underset{n\to\infty}{\text{Lím}}(a_n)=\frac{1}{144}$$

$\therefore$ La sucesión converge a $\frac{1}{144}$

***Clave:*** **C**

## Problema 07

La sucesión:

$$\left\{2;\frac{5}{2};\frac{12}{5};\frac{29}{12};\frac{70}{29};....\right\}$$ converge a:

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\sqrt{2}+1$

D) $\sqrt{2}-1$ E) $\sqrt{3}+1$

***Resolución:***

Para calcular el valor de convergencia debemos calcular el término general, para ello buscaremos una regla de formación:

$a_1=2$

$$a_2=\frac{5}{2}=2+\frac{1}{2}$$

$$a_3=\frac{12}{5}=2+\frac{2}{5}=2+\frac{1}{\frac{5}{2}}$$

$$a_4=\frac{29}{12}=2+\frac{5}{12}=2+\frac{1}{\frac{12}{5}}$$

$$a_5=\frac{70}{29}=2+\frac{12}{29}=2+\frac{1}{\frac{29}{12}}$$

Así sucesivamente; pero notamos que cada término es igual a dos aumentado en el reciproco del término anterior; es decir:

$$a_n = 2 + \frac{1}{a_{n-1}} \; ; \; n \geq 2$$

La cual sería una sucesión por recurrencia; ahora sabemos que:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim(a_{n-1}) = L\,(L > 0)$$

Tomando límites:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left[2 + \frac{1}{a_{n-1}}\right] \Leftrightarrow$$

$$L = 2 + \frac{1}{L} \to L^2 - 2L - 1 = 0$$

Resolviendo por la fórmula general:

$$L = 1 + \sqrt{2} \;\vee\; L = 1 - \sqrt{2}$$

Como los términos son positivos elegimos el valor de $\sqrt{2}+1$ como límite.

$\therefore$ La sucesión comverge a: $\sqrt{2}+1$

***Clave:* C**

## Problema 08

Sabiendo que la sucesión:

$\{a_n\}_{n\in N} = \left\{\sqrt{2n^2+1} - \lambda n\right\}$ converge a cero; determinar el valor de $\lambda$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$
D) 8 E) 2

***Resolución:***

Como la sucesión converge a cero; entonces: $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$

Ahora transformaremos al término general ya que la forma que adopta cuando se toma el límite es: $\infty - \infty$; si $\lambda > 0$; multiplicando por el factor racionalizante:

$$a_n = \left(\sqrt{2n^2+1} - \lambda n\right)\frac{\left(\sqrt{2n^2+1} + \lambda n\right)}{\sqrt{2n^2+1} + \lambda n}$$

Por diferencia de cuadrados:

$$a_n = \frac{2n^2 + 1 - \lambda^2 n^2}{\sqrt{2n^2+1} + \lambda n} = \frac{(2-\lambda^2)n^2 + 1}{\sqrt{2n^2+1} + \lambda n}$$

Como $\lim(a_n) = 0$; entonces $2 - \lambda^2 = 0$ ya que el grado del denominador debe ser mayor que el del numerador.

$$2 - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 2 \to \lambda = \sqrt{2} \;\vee\; \lambda = -\sqrt{2}$$

Como: $\lambda > 0$

$$\therefore \; \lambda = \sqrt{2}$$

***Clave:* A**

## Problema 09

Dada la sucesión:

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ ; $a_1 = \frac{1}{3}$ a partir de que término se cumple que: $|a_n - L| < \frac{1}{192}$; donde $L = \lim_{n\to\infty}(a_n)$

A) 4to B) 5to C) 6to
D) 7mo E) 8vo

***Resolución:***

La sucesión definida por $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ es una sucesión geométrica ya que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \text{ con } a_1 = \frac{1}{3}.$$

Donde su fórmula es $a_n = a_1(q)^{n-1}$,

como $a_1 = \frac{1}{3} \wedge q = \frac{1}{2}$

Reemplazando se obtiene:

$$a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Del enunciado tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = L$$

Tomando límite al término general:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}(0) = 0$$

De la condición: $$|a_n - L| < \frac{1}{192}$$

$$\left|\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 0\right| < \frac{1}{192} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{192} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{64}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{6}$$

Recordando que en una desigualdad exponencial si la base es menor que uno; el sentido para los exponentes cambia entonces:

$$n-1 > 6 \rightarrow n > 7$$

$\therefore$ La condición se cumple a partir del octavo término.

**Clave: E**

**Problema 10**

Sea $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión definida por: $x_1 = m,\ m \in \mathbb{Z}^+ \wedge\ x_n = x_{n-1} + 2(n-1)$ para todo $n \geq 2$ determinar el valor de: $\sqrt{x_m}$.

A) $\frac{m(m+1)}{2}$ B) $2m$ C) $m-1$ D) $m$ E) $m+1$

***Resolución:***

En la fórmula de recurrencia: $x_n = x_{n-1} + 2(n-1);\ n \geq 2$

Evaluamos para: $n = 2 ; 3 ; ...; n$

$$x_2 = x_1 + 2(1)$$
$$x_3 = x_2 + 2(2)$$
$$x_4 = x_3 + 2(3)$$
$$\vdots$$
$$x_m = x_{m-1} + 2(m-1)$$

Sumando: $x_m = x_1 + 2(1) + 2(2) + ... + 2(m-1)$

$$x_m = x_1 + 2[1+2+3+...+(m-1)] \Leftrightarrow x_m = x_1 + 2\left[\frac{(m-1)m}{2}\right]$$

$$x_m = x_1 + (m-1)m$$

Pero:

$$x_1 = m \rightarrow x_m = m + m^2 - m$$

$$x_m = m^2 \Leftrightarrow \sqrt{x_m} = \sqrt{m^2} = m \text{ ; } m \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \text{ El valor de } \sqrt{x_m} \text{ es } m$$

*Clave:* **D**

**Problema 11**

Sean las sucesiones:

$b_{n+1} = b_n + 4$ con $b_1 = 5$; $c_{n+1} = -3c_n$ con $c_1 = 5$; $n \in \mathbb{N}$ entonces el valor de: $\frac{b_n}{c_n}$; para n tendiendo a $+\infty$; se aproxima a:

A) – 4/3 B) 0 C) 3/4
D) 1 E) 4/3

***Resolución:***

La sucesión definida por: $b_{n+1} = b_n + 4$ es una sucesión aritmética ya que:

$b_{n+1} - b_n = 4 = r$ ; este último indica que la diferencia de dos términos consecutivos es constante; entonces su fórmula es:

$b_n = b_1 + (n-1)r$ donde: $b_1 = 5 \wedge r = 4$

$b_n = 5 + (n-1)4 \Leftrightarrow b_n = 4n+1$

La sucesión $\{c_n\}$ es una sucesión geométrica ya que:

$c_{n+1} = -3c_n$; $\frac{c_{n+1}}{c_n} = -3 = q$; esta indica que el cociente de dos términos es constante.

$c_n = c_1 q^{n-1}$ donde: $c_1 = 5 \rightarrow c_n = 5(-3)^{n-1}$

Nos piden:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4n+1}{5(-3)^{n-1}}\right] = \lim_{n\to\infty}(a_n)$$

Para ello usaremos el criterio de la razón, que nos dice:

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$$

$$\text{Lím}\left|\frac{\frac{4n+5}{5(-3)^n}}{\frac{4n+1}{5(-3)^{n-1}}}\right| = \text{Lím}\left|\frac{4n+5}{(-3)(4n+1)}\right|$$

Como $|-3| = 3$ entonces:

$$\text{Lím}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4n+5}{12n+3}\right] = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Como:

$$\frac{1}{3} < 1 \rightarrow \text{Lím } a_n = 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{c_n}\right) \text{ se aproxima a cero.}$$

*Clave:* **B**

**Problema 12**

Sean la sucesiones $\{a_n\}$; $a_n = \frac{3n-1}{n}$ y $b_n = \frac{3n+1}{n}$.

Si $\{c_n\}$ es una sucesión tal que $a_n \le c_n \le b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Calcular: $\lim\limits_{n\to\infty} (C_n)$

A) 3/2 B) 5/2 C) 3
D) 7/2 E) 2

***Resolución:***

En el dato: $a_n \le c_n \le b_n$; reemplazamos los términos generales:

$$\frac{3n-1}{n} \le c_n \le \frac{3n+1}{n}$$

Como nos piden: $\lim\limits_{n\to\infty} (C_n)$; tomamos límite a la desigualdad:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{n}\right) \le \lim_{n\to\infty}(C_n) \le \lim_{n\to\infty}\left\langle\frac{3n+1}{n}\right\rangle$$

$$\Leftrightarrow 3 \le \lim_{n\to\infty}(C_n) \le 3$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(C_n) = 3$$

***Clave:*** **C**

**Problema 13**

Para la sucesión $\{a_n\}$; $a_n = \frac{n+1}{2n+3}$ ¿A partir de qué término de la sucesión; la diferencia de dos términos consecutivos es menor que $\frac{1}{100}$?

A) $a_3$ B) $a_4$ C) $a_5$
D) $a_6$ E) $a_1$

***Resolución:***

Del enunciado planteamos que:

$$a_{n+1} - a_n < \frac{1}{100} .....(\alpha)$$

Como $a_n = \frac{n+1}{2n+3}$ cambiamos n por n + 1; entonces:

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)+3} = \frac{n+2}{2n+5}$$

Reemplazando en ($\alpha$):

$$\frac{n+2}{2n+5} - \frac{n+1}{2n+3} < \frac{1}{100}$$

Efectuando:

$$\frac{(2n^2+7n+6)-(2n^2+7n+5)}{(2n+5)(2n+3)} < \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{(2n+5)(2n+3)} < \frac{1}{100}$$

Entonces:

$100 < (2n+5)(2n+3) \Leftrightarrow 0 < (2n)^2 + 8(2n) - 85$

Completando cuadrados:

$101 < (2n)^2 + 8(2n) + 16 \to 101 < (2n+4)^2$

$\sqrt{101} < 2n+4$ ; pero

$\sqrt{101} > 10 \to 10 < 2n+4 \to 3 < n$

Como $n \in \mathbb{N}$: n = 4 ; 5; 6; 7;....

$\therefore$ Se verifica a partir del cuarto término

***Clave:*** **B**

**Problema 14**

Determine $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n)$; si la sucesión $\{S_n\}$ $n \ge 1$ esta definida por:

$S_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$ ; 0 < a < b < c

A) a+b+c B) ab+ac+bc C) a
D) b E) c



***Resolución:***

Del término general $S_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$,

factorizamos $c^n$:

$$S_n = \sqrt[n]{c^n\left[\frac{a^n}{c^n} + \frac{b^n}{c^n} + 1\right]} \rightarrow S_n = c\left[\left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n + 1\right]^{\frac{1}{n}}$$

Tomando límites:

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_n\right) = \lim_{n\to\infty} c\left[\left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n + 1\right]^{\frac{1}{n}} \quad .....(I)$$

De la condición $0 < a < b < c$ dividimos por c: $0 < \frac{a}{c} < \frac{b}{c} < 1$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{c}\right)^n = 0 \wedge \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{c}\right)^n = 0$$

Evaluando en (I):

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_n\right)^n = c\left[0 + 0 + 1\right]^0 \rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(S_n\right) = c$$

$\therefore$ La sucesión converge a c

***Clave:* E**

## Problema 15

Calcular el valor al cual converge la sucesión $\{a_n\}$ definida por:

$$a_n = \frac{2n^2}{3n+5}\text{Sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

A) $\frac{\pi}{2}$ B) 0 C) $\frac{4\pi}{3}$

D) $\frac{3}{\pi}$ E) 1

***Resolución:***

Nos piden:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n^2}{3n+5}\text{Sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

Pero Sen(x) se puede aproximar a x; cuando la variable x tiende a ser cero.

En nuestro caso $\frac{2\pi}{n}$ tiende a ser cero ya que n tiende al infinito.

Entonces $\text{Sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ se cambia por $\frac{2\pi}{n}$ en el límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n^2}{3n+5}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right] \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4\pi n^2}{3n^2+5n}\right)$$

Como los grados son iguales:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4\pi n^2}{3n^2+5n}\right) = \frac{4\pi}{3}$$

$\therefore$ La sucesión converge a $\frac{4\pi}{3}$

***Clave:* C**

## Problema 16

Sea la sucesión $\{a_n\}$ dada por;

$a_n = \frac{(2n+1)\text{Sen}(n+1)}{3n^2+1}$ converge a:

A) 3/2 B) 2/3 C) 0

D) 4/3 E) 3/4

***Resolución:***

Sabemos que la función Seno varía entre – 1 y 1; entonces:

$$-1 \leq \text{Sen}(n+1) \leq 1$$

Multiplicando por $\frac{2n+1}{3n^2+1}$:

$$-\frac{2n+1}{3n^2+1} \leq \frac{(2n+1)\text{Sen}(n+1)}{3n^2+1} \leq \frac{2n+1}{3n^2+1}$$

Reemplazando $a_n$:

$$-\frac{2n+1}{3n^2+1} \leq a_n \leq \frac{2n+1}{3n^2+1}$$

Pero observamos que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2n+1}{3n^2+1}\right)=-0=0 \wedge \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n^2+1}\right)=0$$

Entonces por el teorema de las sucesiones encajadas.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)=0$$

$\therefore$ La sucesión converge a cero

**Clave: C**

## Problema 17

Determinar el valor de convergencia de la sucesión:

$$\left\{\frac{\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b}}{\sqrt{n+c}-\sqrt{n+d}}\right\}_{n\geq 1}$$

A) $\frac{ab}{cd}$ B) $\frac{a+b}{c+d}$ C) $\frac{a-b}{c-d}$

D) $\frac{ab-cd}{a+d}$ E) $\frac{ad-bc}{c-d}$

***Resolución:***

Sea: $a_n=\frac{\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b}}{\sqrt{n+c}-\sqrt{n+d}}$; nos piden $\lim_{n\to\infty}(a_n)$; este adopta la forma de: $\frac{\infty-\infty}{\infty-\infty}$.

Para levantar la indeterminación transformaremos al término general:

$$a_n=\frac{\left(\sqrt{n+a}^2-\sqrt{n+b}^2\right)\cdot\left(\sqrt{n+c}+\sqrt{n+d}\right)}{\left(\sqrt{n+c}^2-\sqrt{n+d}^2\right)\cdot\left(\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}\right)}$$

$$a_n=\left(\frac{a-b}{c-d}\right)\left(\frac{\sqrt{n+c}+\sqrt{n+d}}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}}\right)$$

Factorizando:

$$a_n=\left(\frac{a-b}{c-d}\right)\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{c}{n}}+\sqrt{1+\frac{d}{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{a}{n}}+\sqrt{1+\frac{b}{n}}\right)}$$

$$a_n=\left(\frac{a-b}{c-d}\right)\left[\frac{\sqrt{1+\frac{c}{n}}+\sqrt{1+\frac{d}{n}}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+\sqrt{1+\frac{b}{n}}}\right]$$

Tomando límites:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)=\left(\frac{a-b}{c-d}\right)\left(\frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)=\left(\frac{a-b}{c-d}\right)\left(\frac{2}{2}\right)=\frac{a-b}{c-d}$$

$\therefore$ La sucesión converge a $\frac{a-b}{c-d}$

**Clave: C**

## Problema 18

Se sabe que $(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$ donde ; $a_n$ ; $b_n\in\mathbb{Z}$.

La sucesión $\{c_n\}$ definida por $c_n=\frac{a_n}{b_n}$ converge a:

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

***Resolución:***

Si $(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$..................(I)

Su par asociado es:



$$\left(2-\sqrt{3}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{3} \text{..........................(II)}$$

$$(I)+(II): \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n = 2a_n$$

$$(I)-(II): \left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n = 2\sqrt{3}b_n$$

Dividiendo:

$$\frac{a_n}{\sqrt{3}b_n} = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n}{\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n}$$

$$\frac{c_n}{\sqrt{3}} = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n}{\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n}$$

Como nos piden la convergencia de $c_n$; tomamos límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{c_n}{\sqrt{3}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n}{\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n}\right]$$

En el segundo miembro dividimos por $\left(2+\sqrt{3}\right)^n$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{n\to\infty}(C_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1+\left[\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right]^n}{1-\left[\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right]^n}\right]$$

Evaluando:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{n\to\infty}(C_n) = \frac{1+0}{1-0} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{n\to\infty}(C_n) = 1$$

$$\text{Lím}(C_n) = \sqrt{3}$$

$\therefore$ La sucesión $\{c_n\}$ converge a $\sqrt{3}$

***Clave: A***

## Problema 19

Dada la sucesión:

$$\left\{\frac{\sqrt{1+1^2}+\sqrt{1+2^2}+\sqrt{1+3^2}+...+\sqrt{1+n^2}}{3n^2+5n+2}\right\}_{n\geq 1}$$

¿A que valor converge?

A) 1/3 B) 2 C) 1/2
D) 1/6 E) 1/8

***Resolución:***

Nos piden:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1+1^2}+\sqrt{1+2^2}+....+\sqrt{1+n^2}}{3n^2+5n+2}\right)$$

Cuando en el numerador de un límite es una serie y el denominador es divergente se recomienda usar el teorema de Stolz – cesaro:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}\right) \text{......(I)}$$

Sea:

$$a_n = \sqrt{1+1^2}+\sqrt{1+2^2}+.......$$
$$+\sqrt{1+(n-1)^2}+\sqrt{1+n^2}$$

$$a_{n-1} = \sqrt{1+1^2}+\sqrt{1+2^2}+....+\sqrt{1+(n-1)^2}$$

Restando: $a_n - a_{n-1} = \sqrt{1+n^2}$.....($\alpha$)

Ahora:

$$b_n = 3n^2+5n+2$$

$$b_{n-1} = 3(n-1)^2+5(n-1)+2$$

Restando: $b_n - b_{n-1} = 6n+2$......($\beta$)

Reemplazando en (I):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+n^2}}{6n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}}{6+\frac{2}{n}}$$

Evaluando: $\frac{0+1}{6+0}=\frac{1}{6}$; por lo tanto la sucesión converge a $\frac{1}{6}$.

***Clave:*** **D**

## Problema 20

¿A qué valor converge la sucesión $\{a_n\}$ definida por $a_n=\frac{4^{n+2}}{(n+3)!}$?

A) 5 B) 1 C) 0
D) – 1 E) – 5

***Resolución:***

Debemos calcular: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{4^{n+2}}{(n+3)!}\right]$

Pero relacionar la exponencial con el factorial no es fácil, entonces para hallar el límite usaremos el criterio de la razón;

si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$; entonces la sucesión $\{a_n\}$ converge a cero.

Veamos: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{4^{n+3}}{(n+4)!}}{\frac{4^{n+2}}{(n+3)!}}\right]$, efectuando

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4}{n+4}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n+4}\right)=0<1$$

∴ La sucesión $\{a_n\}$ converge a cero

***Clave:*** **C**

## Problema 21

Determine el valor de convergencia de la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[2^{-k}+3^{-k}\right]^2$$

A) $\frac{101}{100}$ B) $\frac{102}{201}$ C) $\frac{103}{120}$
D) $\frac{104}{127}$ E) $\frac{105}{123}$

***Resolución:***

La serie se puede escribir así:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k+\left(\frac{1}{3}\right)^k\right]^2$$

Elevando al cuadrado:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^k+2\left(\frac{1}{6}\right)^k+\left(\frac{1}{9}\right)^k\right]$$

Por propiedad de las sumatorias:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k$$

Nótese cada una de las sumatorias corresponden a una serie geométrica; entonces por la suma límite de la serie geométrica.

$$S=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}+2\left[\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}\right]+\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}$$

$$S=\frac{1}{3}+2\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{8}$$

$$\therefore\ S=\frac{103}{120}$$

***Clave:*** **C**

**Problema 22**

Determine el valor de convergencia de la siguiente serie:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k-1}{5^k}\right)$$

A) $\frac{3}{16}$ B) $\frac{11}{16}$ C) $\frac{3}{8}$

D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{13}{15}$

***Resolución:***

Desarrollando la serie:

$$S=\frac{2}{5}+\frac{5}{5^2}+\frac{8}{5^3}+\frac{11}{5^4}+....$$

Esta serie es conocida como la aritmética geométrica y la estrategia es multiplicarla por la razón de la serie geométrica en nuestro caso por 1/5 y luego restarla de la serie principal; observe:

$$S=\frac{2}{5}+\frac{5}{5^2}+\frac{8}{5^3}+\frac{11}{5^4}+.....$$

$$\frac{1}{5}S=\frac{2}{5^2}+\frac{5}{5^3}+\frac{8}{5^4}+\frac{11}{5^5}+.....$$

$$\frac{4}{5}S=\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\frac{3}{5^4}+.....$$

$$\frac{4}{5}S=\frac{2}{5}+\frac{\frac{3}{5^2}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{2}{5}+\frac{3}{20}$$

$$\therefore\ S=\frac{11}{16}$$

*Clave:* **B**

**Problema 23**

Si la serie $S=\frac{1}{a}+\frac{11}{a^2}+\frac{111}{a^3}+\frac{1111}{a^4}+....$ converge al valor de 13/36; entonces el valor de a es:

A) 1/3 B) 3/4 C) 10/13

D) 13 E) 18

***Resolución:***

Multiplicamos por 9 para poder darle la forma en potencias de base 10.

$$9S=\frac{9}{a}+\frac{99}{a^2}+\frac{999}{a^3}+\frac{9999}{a^4}+....$$

Descomponiendo los numeradores:

$$9S=\frac{10-1}{a}+\frac{10^2-1}{a^2}+\frac{10^3-1}{a^3}+\frac{10^4-1}{a^4}+....$$

Agrupando convenientemente:

$$9S=\left(\frac{10}{a}+\frac{10^2}{a^2}+\frac{10^3}{a^3}+....\right)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+....\right)$$

Aplicando la suma límite:

$$9S=\frac{\frac{10}{a}}{1-\frac{10}{a}}-\frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}}$$

Nótese que la razón es $\left(\frac{1}{a}\right)\in\langle-1;1\rangle$

$$9S=\frac{10}{a-10}-\frac{1}{a-1}\Leftrightarrow S=\frac{1}{9}\left[\frac{10}{a-10}-\frac{1}{a-1}\right]$$

Como la serie converge a 13/36; entonces:

$$\frac{1}{9}\left[\frac{10}{a-10}-\frac{1}{a-1}\right]=\frac{13}{36}$$

Efectuando y factorizando:

$$13a^2-179a+130=0$$

a ⟍⟋ -13

13a ⟋⟍ -10

$$(a-13)(13a-10)=0$$

$a = 13 \vee a = \frac{10}{13}$ (no por restricción)

$$\therefore a = 13$$

*Clave:* **D**

**Problema 24**

Determine el valor de:

$$S = \frac{1}{11} + \sum_{k=1}^{10} \left( \frac{k^4 + 2k^3 + k^2 + 1}{k^2 + k} \right)$$

A) 440 B) 441 C) 442
D) 443 E) 445

***Resolución:***

Transformando el numerador del término general:

$$k^4 + 2k^3 + k^2 + 1 = \left(k^2 + k\right)^2 + 1$$

Reemplazando:

$$S = \frac{1}{11} + \sum_{k=1}^{10} \left[ \frac{(k^2 + k)^2 + 1}{k^2 + k} \right]$$

Descomponiendo en fracciones parciales:

$$S = \frac{1}{11} + \sum_{k=1}^{10} \left[ k^2 + k + \frac{1}{k(k+1)} \right]$$

Por la propiedad distributiba de series:

$$S = \frac{1}{11} + \sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} \left[ \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right]$$

Calculando el valor de cada sumatoria:

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385$$

$$\sum_{k=1}^{10} k = 1 + 2 + 3 + ... + 10 = \frac{10(11)}{2} = 55$$

$$\sum_{k=1}^{10} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$$

¡Regla telescópica!

Reemplazando:

$$S = \frac{1}{11} + 385 + 55 + \frac{10}{11}$$

$$\therefore S = 441$$

*Clave:* **B**

**Problema 25**

Calcule la siguiente suma:

$$S = 1 + \frac{1}{5} + \frac{3}{25} + \frac{7}{125} + \frac{15}{625} + \frac{31}{3125} + .....$$

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{17}{12}$
D) $\frac{21}{12}$ E) 2

***Resolución:***

Observamos que los denominadores son términos de una progresión geométrica, buscaremos en los numeradores la forma de una progresión geométrica.

$$S = 1 + \frac{2-1}{5} + \frac{2^2 - 1}{5^2} + \frac{2^3 - 1}{5^3} + \frac{2^4 - 1}{5^4} + ....$$

Descomponiendo y agrupando:

$$S = \left( 1 + \frac{2}{5} + \frac{2^2}{5^2} + \frac{2^3}{5^3} + \right) - \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} ... \right)$$

Por la suma límite de una serie geométrica:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} - \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} \Leftrightarrow S = \frac{1}{\frac{3}{5}} - \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\therefore S = \frac{17}{12}$$

*Clave:* **C**

## Problema 26

Si $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)=a\left(a\in\mathbb{R}\right)$.

Determine el valor de convergencia de la serie $S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$ en términos de a.

A) $\frac{a}{4}$  B) $\frac{a}{2}$  C) $\frac{3a}{4}$

D) $\frac{4a}{3}$  E) $\frac{3a}{2}$

***Resolución:***

Desarrollando el dato:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=a\Leftrightarrow 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+....=a$$

Agrupando convenientemente:

$$\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+...\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+...\right)=a$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+\frac{1}{2^2}\left[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}...\right]=a$$

$$S+\frac{1}{4}(a)=a\Leftrightarrow S=a-\frac{a}{4}$$

$$\therefore\ S=\frac{3}{4}a$$

*Clave:* C

## Problema 27

Determine el menor valor entero positivo para k tal que:

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}<\frac{1}{500}$$

A) 5  B) 6  C) 7

D) 8  E) 9

***Resolución:***

El numerador del término general de la serie se puede escribir así:

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}<\frac{1}{500}\quad\Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=k}^{\infty}\left[\frac{n+1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}\right]<\frac{1}{500}$$

Observación:

$$(n+1)!=(n+1)\cdot n!$$

Reemplazando:

$$\sum_{n=k}^{\infty}\left[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right]<\frac{1}{500}$$

Según telescópica:

$$\frac{1}{k!}-\frac{1}{\infty}<\frac{1}{500}$$

Reduciendo términos:

$$\frac{1}{k!}<\frac{1}{500}\Leftrightarrow 500<k!$$

De donde podemos decir que el valor mínimo de k = 6 ya que 6! = 720.

$$\therefore\ k=6$$

*Clave:* B

## Problema 28

Calcule el valor de la suma

$$H=\sum_{i=4}^{13}\left\{\left[\sum_{k=1}^{64}\left(\sqrt{5k-1}-\sqrt{5k+4}\right)\right](2i-11)\right\}$$

A) – 906  B) – 960  C) – 968
D) – 986  E) – 969

***Resolución:***

Notamos que la serie del corchete es telescópica; entonces sea:

$$S=\sum_{k=1}^{64}\left(\sqrt{5k-1}-\sqrt{5k+4}\right)$$

$$S=\sqrt{4}-\sqrt{9}$$
$$\sqrt{9}-\sqrt{14}$$
$$\sqrt{14}-\sqrt{19}$$
$$\vdots$$
$$\sqrt{319}-\sqrt{324}$$

Reduciendo:

$$S=\sqrt{4}-\sqrt{324}=-16$$

Reemplazando:

$$H=\sum_{i=4}^{13}\{[-16](2i-11)\}$$

$$H=\sum_{i=4}^{13}(-32i+176)$$

Por propiedad distributiva en la sumatoria:

$$H=-32\sum_{i=4}^{13}i+\sum_{i=4}^{13}176$$

$$H=-32\underbrace{(4+5+6+...+13)}_{10\text{ términos}}+\underbrace{(176+176+...+176)}_{10\text{ términos}}$$

$$H=-32\frac{(4+13)}{2}\cdot 10+176(10)$$

$$H=-960$$

**Clave: B**

**Problema 29**

El conjunto:

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1-x)^n}\text{ converge}\right\}$$

es igual que:

A) $\mathbb{R}$ B) $\langle 0;\infty\rangle$ C) $\left\langle \frac{1}{2};\infty\right\rangle$

D) $\left\langle -\infty;\frac{1}{2}\right\rangle$ E) $\left\langle -\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle$

***Resolución:***

De la serie; el término general es:

$$a_n=\left(\frac{x}{1-x}\right)^n$$

Para que la serie sea convergente utilizaremos el criterio de la raíz o de Cauchy que nos indica:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1\longrightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x}{1-x}\right|^n}<1$$

$$\left|\frac{x}{1-x}\right|<1;\ \text{si } x\neq 1$$

$|x|<|1-x|$ al cuadrado

$$x^2<1-2x+x^2\Leftrightarrow 2x<1$$

$$x<\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ A=\left\langle -\infty;\frac{1}{2}\right\rangle$$

**Clave: D**

**Problema 30**

Si S es una serie definida por

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\left(Ln\sqrt[k]{e}\right)\left(\log_2 e^{(k+1)!}\right)}\right]\text{ entonces}$$

el valor de convergencia es:

A) $\ln(4)$ B) $\ln(2)$ C) $\frac{1}{2}\ln(2)$

D) 1 E) $\frac{1}{e}$

***Resolución:***

Por el logaritmo de una potencia en la serie:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\ln e^{\frac{1}{k}}\cdot\log_2 e^{(k+1)!}}\right]\rightarrow S=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\frac{1}{k}\cdot(k+1)!Ln(e)\cdot\log_2(e)}\right]$$

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{k}{(k+1)!\,\log_2 e}\right]=\frac{1}{\log_2 e}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{k}{(k+1)!}\right]\Leftrightarrow S=\left(\log_e 2\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}\right]$$

Descomponiendo:

$$S=Ln(2)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{k+1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!}\right]$$

Reemplazando $(k+1)k!$ en vez de $(k+1)!$ y simplificando:

$$S=Ln(2)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right]$$

Según la regla telescópica:

$$S=Ln(2)\cdot\left[1-\frac{1}{\infty}\right]=Ln(2)\cdot[1-0]$$

$$\therefore\ S=Ln(2)$$

***Clave:*** **B**

## Problema 31

El número de términos de una progresión aritmética comprendidos entre 23 y 59 es el docble del comprendido entre 3 y 23; calcular la razón:

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

***Resolución:***

Por dato del problema; se tiene que:

$$\text{P.A.}:3\underbrace{\ldots\ldots}_{n}23\underbrace{\ldots\ldots}_{2n}59\quad(\text{razón } r)$$

Para obtener una relación con r y n consideraremos como 2 progresiones aritméticas de n y 2n medios aritméticos respectivamente, calculemos la razón de interpolación:

$$r_1=\frac{23-3}{n+1}\ \wedge\ r_2=\frac{59-23}{2n+1}\ldots\ldots(\alpha)$$

Como es la misma P.A. entonces:

$$r_1=r_2=r\rightarrow\frac{20}{n+1}=\frac{36}{2n+1}$$

Al resolver: n = 4

Reemplazamos en la ecuación «$\alpha$» para obtener el valor de r.

Razón = r = 4

***Clave:*** **B**

**Problema 32**

Calcule el número de medios aritméticos que es necesario interpolar entre 1 y 19 para que el segundo medio esté, con el último, en la relación de 1/6.

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

***Resolución:***

Sea la progresión aritmética:

$$\underbrace{1;..................;19}$$

También sea n el número de medios aritméticos, entonces:

$$\text{Razón} = \frac{19-1}{n+1} = \frac{18}{n+1} ..........(\alpha)$$

Además por condición del problema:

(i) 2° medio aritmético = 3° de la P.A.
2° medio aritmético = 1 +2r

(ii) Último medio aritmético = Penúltimo de la P.A.
Último medio aritmético = 19 – r

Luego por dato: $\frac{1+2r}{19-r} = \frac{1}{6} \rightarrow r = 1$

Reemplazando en ($\alpha$):

$$1 = \frac{18}{n+1} \rightarrow n = 17$$

***Clave:* E**

**Problema 33**

Si $x^2+2$; $x^2+14$; $x^2+50$; están en progresión geométrica; determinar el valor de:

$$E = \left[\frac{(x^2+2)^2+(x^2+14)^2+(x^2+50)^2}{(3x^2+66)(x^2+38)}\right]^2$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 1

***Resolución:***

Si los siguientes términos:

$$x^2+2;\ x^2+14;\ x^2+50$$

Están en progresión geométrica; entonces:

$$(x^2+14)^2 = (x^2+2)(x^2+50)$$

Efectuamos para obtener el valor de $x^2$:

$$x^4+28x^2+196 = x^4+52x^2+100 \rightarrow x^2 = 4$$

Nos piden el valor de la expresión E:

$$E = \left[\frac{(x^2+2)^2+(x^2+14)^2+(x^2+50)^2}{(3x^2+66)(x^2+38)}\right]$$

Reemplazamos el valor de $x^2 = 4$

$$E = \left[\frac{(4+2)^2+(4+14)^2+(4+50)^2}{(3\cdot 4+66)(4+38)}\right]$$

$$E = \left[\frac{6^2+18^2+54^2}{78\cdot 42}\right]^2$$

Simplificando: E = 1

***Clave:* E**

**Problema 34**

Se han interpolado m medios diferenciales entre 4 y 18 y (m + 2) entre 10 y 24 de manera que la razón de la progresión formada en el primer caso esté con la razón de la segunda en la relación $\frac{9}{7}$.

Calcular el número de términos de cada una de las progresiones.

A) 8 y 10 B) 9 y 10 C) 7 y 9
D) 11 y 12 E) 12 y 13

***Resolución:***

Sea la progresión aritmética:

P.A. : 4 ; ........; 18 (razón = r)



Luego por dato se han interpolado m medios diferenciales; entonces:

$$r_1 = \frac{18-4}{m+1} = \frac{14}{m+1}$$

También en otra progresión aritmética:

P.A.: 10;...........24 (razón = $r_2$)

En esta P.A. se han interpolado m + 2 medios diferenciales.

$$r_2 = \frac{24-10}{(m+2)+1} = \frac{14}{m+3}$$

Por dato del problema:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{9}{7} \rightarrow \frac{\frac{14}{m+1}}{\frac{14}{m+3}} = \frac{9}{7} \rightarrow \frac{m+3}{m+1} = \frac{9}{7} \rightarrow m = 6$$

∴ Las P.A. tienen 8 y 10 términos

**Clave: A**

## Problema 35

El primer término de una sucesión geométrica es igual a x – 2; el tercer término es igual a x + 6; y la media aritmética de los términos primero y tercero es al segundo término de la sucesión como 5 es a 3.

Calcular el sexto término de la sucesión y dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 6  B) 9  C) 18
D) 24  E) 23

***Resolución:***

Sea los siguientes términos:(x – 2); $t_2$; (x + 6).....

Por ser progresión geométrica:

$$t_2 = \sqrt{(x-2)(x+6)}$$

También por condición del problema:

$$\frac{\frac{(x-2)+(x+6)}{2}}{\sqrt{(x-2)(x+6)}} = \frac{5}{3} \rightarrow 3(x+2) = 5 \cdot \sqrt{(x-2)(x+6)}$$

Para obtener el valor de x elevamos al cuadrado y efectuamos:

$$9x^2 + 36x + 36 = 25x^2 + 100x - 300$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

Factorizando: $(x+7)(x-3) = 0$; de donde:

$x = -7 \vee x = 3$

Si tomamos: x = 3; la sucesión será:

$1; 3; 9; 27; 81; \underbrace{243}_{6^{\circ}\text{ término}}; ..........$

Nos piden la suma de cifras del sexto término: 2 + 4 + 3 = 9

**Nota:**
Para x = –7 no aparece alternativa correcta.

**Clave: B**

## Problema 36

En una serie geométrica de números naturales de razón $r > 1$; $r \in \mathbb{N}$; la suma de los $n_0$ primeros términos es 31; $n_0 > 3$; si $a_0$ es el primer término de la serie.

Calcular: $a_0 + n_0$

A) 4  B) 6  C) 7
D) 8  E) 9

***Resolución:***

Por datos del problema; se tiene que:

Primer término = $a_0 \in \mathbb{N}$

Número de términos: $n_0 > 3$

Suma = 31 = $S_{n_0}$

Razón = r > 1 ; $r \in \mathbb{N}$

Luego la suma de los $n_0$ primeros términos es:

$$S_{n_0} = a_0\left(\frac{r^{n_0} - 1}{r-1}\right) = 31$$

Como $a_0 \in \mathbb{N}$; consideremos esta posibilidad:

$$a_0 \cdot \left[\frac{r^{n_0}-1}{r-1}\right] = 1 \cdot 31$$

Entoces: $a_0 = 1$

Además:

$$\frac{r^{n_0}-1}{r-1} = 31 \rightarrow r^{n_0}-1 = 31(r-1)$$

Siendo: $r > 1$ y $n_0 > 3$

Además son números naturales.
Podemos considerar esta posibilidad:

$$1 \cdot (r^{n_0}-1) = 31 \cdot (r-1)$$

Por una simple comparación:

$$1 = r-1 \wedge r^{n_0}-1 = 31 \rightarrow r = 2 \wedge 2^{n_0} = 32 \rightarrow n_0 = 5$$

$$\therefore a_0 + n_0 = 6$$

***Clave: B***

## Problema 37

Una progresión geométrica de razón 2; es tal que admite 5n términos siendo la suma de los n primeros $(8)^{40}$ y la suma de los n últimos $(16)^{40}$.
Calcular el número de términos.

A) 80 B) 75 C) 60
D) 50 E) 40

***Resolución:***

Sea la progresión geométrica de 5n términos; la siguiente:

$$P.G: \underbrace{t_1; \ldots\ldots t_n}_{n \text{ términos}}; \ldots\ldots; \underbrace{t_{4n+1}; \ldots; t_{5n}}_{n \text{ términos}}$$

También por dato del problema:

$$\text{razón} = 2;\ t_{4n+1} = t_1 \cdot 2^{4n}$$

Entonces la suma de los n primeros términos por dato del problema es:

$$S_n \text{ primeros} = t_1 \cdot \left[\frac{2^n-1}{2-1}\right] = 8^{40} \ldots\ldots.(I)$$

También la suma de los n últimos términos es:

$$S_n \text{ últimos} = t_{4n+1}\left[\frac{2^n-1}{2-1}\right] = 16^{40} \ldots\ldots.(II)$$

Luego para obtener el valor de n dividimos las ecuaciones (I) y (II):

$$\frac{t_{4n+1}}{t_1} = \frac{16^{40}}{8^{40}} = \frac{t_1 \cdot 2^{4n}}{t_1} = 2^{40}$$

Entonces: $2^{4n} = 2^{40} \rightarrow n = 10$
Nos piden el número de términos:

$$5n = 50$$

***Clave: D***

## Problema 38

Si $S_n$ es la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica y $\overline{S}_n$ es la suma de las reciprocas de estos términos; calcular el producto de los n primeros términos de la progresión.

A) $\left[\frac{S_n}{\overline{S}_n}\right]^n$ B) $\left[\frac{S_n}{\overline{S}_n}\right]^{n/2}$ C) $\left[\frac{\overline{S}_n}{S_n}\right]^{n/2}$

D) $\left[\frac{S_n}{\overline{S}_n}\right]^2$ E) $\sqrt{S_n \cdot \overline{S}_n}$

***Resolución:***

1° P.G. : $t_1 : t_2$ (razón = q); entonces:

$$S_n = t_1\left[\frac{q^n-1}{q-1}\right] \ldots\ldots.(I)$$

2° P.G. : $\frac{1}{t_1}; \frac{1}{t_2}; \ldots; \frac{1}{t_n}$ $\left(\text{razón} = \frac{1}{q}\right)$;

entonces:

$$\overline{S}_n = \frac{1}{t_1} \cdot \left[ \frac{\left[\frac{1}{q}\right]^n - 1}{\frac{1}{q} - 1} \right] \rightarrow \overline{S}_n = \frac{1}{t_1} \cdot \frac{q \cdot (q^n - 1)}{q^n (q-1)}$$

También: $\overline{S}_n = \dfrac{1}{t_1 \cdot q^{n-1}} \cdot \left[ \dfrac{q^n - 1}{q-1} \right]$.......(II)

Como nos piden el producto de los n primeros términos de la progresión:

$$P_n = \sqrt{(t_1 \cdot t_n)^n}$$

Pero: $t_n = t_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow P_n = \sqrt{\left[t_1^2 \cdot q^{n-1}\right]^n}$

Ahora formaremos una relación con los datos. Para eso dividimos (I) ÷ (II).

$$\frac{S_n}{\overline{S}_n} = \frac{t_1}{\dfrac{1}{t_1 \cdot q^{n-1}}} = t_1^2 \cdot q^{n-1}$$

De aqui elevamos al exponente $\frac{n}{2}$

$$\left[\frac{S_n}{\overline{S}_n}\right]^{\frac{n}{2}} = \left[t_1^2 \cdot q^{n-1}\right]^{\frac{n}{2}} = \sqrt{\left[t_1^2 \cdot q^{n-1}\right]^n}$$

$$\therefore \quad P_n = \left[\frac{S_n}{\overline{S}_n}\right]^{\frac{n}{2}}$$

**Clave: B**

## Problema 39

Obtener la relación que existe entre x e y de tal manera que el medio proporcional de lugar r entre x $\wedge$ 2y sea el mismo medio proporcional de lugar r entre y $\wedge$ 2x; habiendo n medios proporcionales interpolados en cada caso $(n+1 \neq 2r)$.

A) $x = y$ B) $x^2 = y$ C) $y^2 = x$

D) $\frac{x}{y} = 2$ E) $x = 3y$

***Resolución:***

1° P.G. : $\underbrace{x; \ldots M}_{(r+1) \text{ términos}}$ ; ....2y ; (razón = $q_1$)

Ahora obtendremos la razón de interpolación $(q_1)$: $q_1 = \sqrt[n+1]{\dfrac{2y}{x}}$

Además: $t_{r+1} = t_1 \cdot q_1^r$

Entonces: $M = x \cdot q_1^r$ ..........(I)

2° P.G. : $\underbrace{y; \ldots\ldots M}_{r+1 \text{ términos}}$ ; ............2x ; (razón = $q_2$)

Calculemos la razón de interpolación

$(q_2)$: $q_2 = \sqrt[n+1]{\dfrac{2x}{y}}$ ; además: $t_{r+1} = t_1 \cdot q_2^r$

Entonces: $M = y \cdot q_2^r$ ............(II)

Luego para obtener la relación que existe entre x = y dividimos las ecuaciones (I) ÷ (II)

$$\frac{M}{M} = \frac{x \cdot q_1^r}{y \cdot q_2^r} \rightarrow 1 = \frac{x}{y}\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^r$$

Reemplazamos los valores de $q_1 \wedge q_2$:

$$1 = \frac{x}{y}\left[\frac{\sqrt[n+1]{\dfrac{2y}{x}}}{\sqrt[n+1]{\dfrac{2x}{y}}}\right]^r \rightarrow 1 = \frac{x}{y} \cdot \left[\frac{y}{x}\right]^{\frac{2r}{n+1}} = \left[\frac{x}{y}\right]^{\frac{n+1-2r}{n+1}}$$

Entonces para que esto se cumpla:

$$n + 1 - 2r = 0 \ \vee \ \frac{x}{y} = 1$$

Es decir: $n + 1 = 2r \ \vee \ x = y$

**Clave: A**

**Problema 40**

Se da una progresión geométrica de razón ($r \neq 0$) y con el primer término distinto de cero, también se da una progresión aritmética con el primer término igual a cero; se suman los términos correspondientes de estas dos progresiones obteniéndose una tercera sucesión donde los tres primeros términos son 1; 1; 2.

Calcular la suma de los 10 primeos términos de esta nueva progresión.

A) 977 B) 978 C) 979
D) 980 E) 981

***Resolución:***

Sean las progresiones:

P.G. : $a$ ; $ar$ ; $ar^2$ ; .... (razón $r \neq 0$)

P.A. : o ; n ; 2n; ..... (razón n)

Del dato al sumar los términos correspondientes:

$$a + 0 = 1 \rightarrow a = 1$$

$$ar + n = 1 \rightarrow r + n = 1 \text{........(I)}$$

$$ar^2 + 2n = 2 \rightarrow r^2 + 2n = 2 \text{......(II)}$$

Luego para obtener el valor de r; restamos (II) – 2(I):

$$r^2 - 2r = 0 \rightarrow r = 0 \ \vee \ r = 2$$

Reemplazamos el valor de r = 2; en las progresiones:

P.G.:1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; 512

P.A.: 0; –1;–2;–3;–4;–5;–6;–7;–8;–9

De esto la nueva sucesión es:

1; 1; 2; 5; 12; 27; 58; 121; 248; 503

∴ La suma de los términos: 978

*Clave:* B

**Problema 41**

La suma de los dos primeros términos de la progresión aritmética es igual al valor absoluto de la suma de las raíces de la ecuación:

$1 - \frac{6}{x} - \frac{135}{x^2} = 0$ y el sexto término es igual a 21.

Calcular la razón.

A) 2 B) 4 C) 2,5
D) 6 E) 3

***Resolución:***

De la ecuación: $1 - \frac{6}{x} - \frac{135}{x^2} = 0$

También se puede expresar:

$$x^2 - 6x - 135 = 0$$

Luego por dato del problema:

$$a_1 + a_2 = 6 \rightarrow a_6 = 21$$

Sea r la razón de la progresión aritmética, entonces:

$$a_1 = a \rightarrow a_2 = a + r \rightarrow a_6 = a + 5r$$

Remplazando en los datos:

$a + a + r = 6 \rightarrow 2a + r = 6$.......(I)

$a + 5r = 21$.........................(II)

De las ecuaciones (I) y (II), hacemos 2(II) – (I):

$$\begin{array}{r} 2a + 10r = 42 \\ 2a + \quad r = 6 \\ \hline 9r = 36 \end{array} \ (-) \rightarrow r = 4$$

*Clave:* B

**Problema 42**

Se interpolan cuatro medios geométricos entre 160 y 5. Calcular la suma de los dos últimos términos de la progresión geométrica formada.

A) 40 B) 60 C) 30
D) 15 E) 10

***Resolución:***

Sea la progresión geométrica de razón q: P.G.: ÷÷ 160: ............... :5
medios geométricos = 4



Calculemos la razón de interpolación:

$$q = \sqrt[4+1]{\frac{5}{160}} \rightarrow q = \frac{1}{2}$$

Luego la progresión geométrica será:
$\div\div$ 160; 80; 40; 20; 10; 5
Entonces la suma de los dos últimos:
10 + 5 = 15

**Clave: D**

## Problema 43

Determine cuatro números; sabiendo que los tres primeros están en progresión aritmética y los tres últimos están en progresión geométrica siendo la suma de los extremos 14 y la suma de los medios iguales a 12; dar como respuesta uno de ellos.

A) 10 B) 6 C) 7
D) 9 E) 8

***Resolución:***

Sean los cuatro números: a; b; c; d
Por dato del problema los 3 primeros están en P.A.

$2b = a + c$............(I)

Los tres últimos están en P.G.:

$c^2 = b \cdot d$.............(II)

También: a + d = 14 ......(III)
b + c = 12.......(IV)

Luego para obtener uno de los cuatro números:
De (IV): C = 12 – b..............(V)

(III) + (IV):

$$\underbrace{a + c}_{2b} + b + d = 26 \rightarrow 3b + d = 26$$

$d = 26 - 3b$.......(VI)

Reemplazamos: (V) y (VI) en (II):

$$(12 - b)^2 = (b) \cdot (26 - 3b) \rightarrow 2b^2 - 25 + 72 = 0$$

Factorizando por aspa simple:

$$(2b - 9)(b - 8) = 0 \rightarrow b = \frac{9}{2} \vee b = 8$$

$\therefore$ Uno de ellos es 8

**Clave: E**

## Problema 44

Los elementos x; y; z en dicho orden forman una progresión aritmética de suma 15. Los elementos x; y+1; z+5 forman una progresión geométrica en el mismo orden; tal que la suma es 21; si $0 \leq x \leq 10$; calcular el valor de 4z.

A) 20 B) 28 C) 32
D) 44 E) 48

***Resolución:***

Como los elementos x; y; z; forman una progresión aritmética de suma 15.
2y = x + z ..............(I)
x + y + z = 15 ........(II)

Reemplazando la ecuación (I) en (II):

$$2y + y = 15 \rightarrow 3y = 15 \rightarrow y = 5 \wedge x + z = 10$$

Luego también los elementos:
x; y + 1; z + 5; forman una progresión geométrica; entonces:

$(y + 1)^2 = x(z + 5)$.........(III)

Como: $y = 5 \wedge z = 10 - x$
Para obtener el valor de x reemplazamos en la ecuación (III):

$$(5 + 1)^2 = x(10 - x + 5) \rightarrow 36 = x(15 - x)$$

$x^2 - 15x + 36 = 0$
Factorizando por aspa simple:
(x–3)(x–12) = 0

Como: $0 \leq x \leq 10$; entonces: x = 3
Luego: z = 7
Nos piden: 4z = 28

**Clave: B**

E&M



**Problema 45**

Si la progresión aritmética:

$\overline{bb}; \overline{bb}+b; \overline{bb}+2b; ....456$; tiene $\overline{bb}$ términos; entonces determine el término de lugar 11; contando a partir del último término.

**Nota:** b es un digito; $0 \leq b \leq 9$

A) 378  B) 384  C) 390
D) 396  E) 402

***Resolución:***

Sea la progresión aritmética:

$$\overline{bb}; \overline{bb}+b; \overline{bb}+2b; ....456$$

Por dato del problema; el número de términos es: $n = \overline{bb}$

También: $t_1 = \overline{bb}$ ; $r = b$

Entonces para obtener el valor de b formaremos una relación a partir de la siguiente ecuación:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

En el problema:

$456 = \overline{bb} + (\overline{bb} - 1)b$

$456 = 11 \cdot b + (11b - 1)b \rightarrow 11b^2 + 10b - 456 = 0$

Factorizando por aspa simple:

$$(11b + 76)(b - 6) = 0$$

Entonces como b es natural; b = 6

Luego en el problema nos piden el término de lugar 11 contando a partir del final:

$$a_{11} = a_1 - 10r = 456 - 10(6)$$

$$\therefore a_{11} = 396$$

***Clave:* D**

**Problema 46**

En una progresión aritmética el primer término es 12; el número de términos es 9 y la suma es 252. En otra progresión aritmética el primer término es 2 y la razón 6. Dos términos del mismo lugar de estas progresiones son iguales. ¿Cuál es el valor de este término?

A) 8  B) 12  C) 16
D) 24  E) 32

***Resolución:***

Por dato del problema en la primera progresión aritmética:

$$a_1 = 12 \ ; n = 9 \ \ S_9 = 252$$

Pero: $S_n = \left(\dfrac{a_1 + a_n}{2}\right)n$

Reemplazando los datos:

$$S_n = \frac{(2a_1 + 8r)}{2}9$$

$$252 = \frac{(24+8r)}{2} \cdot 9 \rightarrow 24 + 8r = 56 \rightarrow r = 4$$

Luego en la segunda progresión aritmética se tiene que: $a_1 = 2$ ; $r = 6$

También del dato; dos términos del mismo lugar de estas progresiones son iguales.

Entonces de la primera:

$$t_k = 12 + (k-1)4$$

De la segunda:

$$t_k = 2 + (k-1)6$$

Luego de la condición del problema:

$$12 + (k-1) \cdot 4 = 2 + (k-1) \cdot 6$$

$$10 = 2(k-1) \leftrightarrow k = 6$$

Entonces: $a_k = a_6 = 32$

***Clave:* E**

**Problema 47**

En una progresión aritmética de n términos los dos primeros estan en la relación de 3 a 7. ¿En que relación están los dos últimos términos?



A) $\dfrac{3n-1}{3n-5}$ B) $\dfrac{4n-5}{4n-1}$ C) $\dfrac{3n+2}{3n+1}$

D) $\dfrac{4n-1}{4n-3}$ E) $\dfrac{n}{n-1}$

***Resolución:***

Por dato del problema: $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{3}{7}$

Pero: $a_2=a_1+r \rightarrow \dfrac{a_1}{a_1+r}=\dfrac{3}{7}$

$$7a_1=3a_1+3r \rightarrow a_1=\frac{3r}{4}$$

Como nos piden la relación de los dos últimos términos: $\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$

Pero:

$$a_{n-1}=a_1+(n-2)r \rightarrow a_{n-1}=\frac{3r}{4}+(n-2)r$$

También:

$$a_n=a_1+(n-1)r \rightarrow a_n=\frac{3r}{4}+(n-1)r$$

Entonces: $\dfrac{a_{n-1}}{a_n}=\dfrac{\dfrac{3r}{4}+(n-2)r}{\dfrac{3r}{4}+(n-1)r}$

Simplificando el valor de r:

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{3+4(n-2)}{3+4(n-1)}$$

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{4n-5}{4n-1}$$

*Clave:* **B**

**Problema 48**

Sean x; y ; z tres números en progresión geométrica sabiendo que:

$x+y+z=209 \wedge x^2+y^2+z^2=1603$ ; $z>x$

Calcular dichos números e indique x+y–z

A) 10 B) 11 C) 12

D) 9 E) 8

***Resolución:***

Como los siguientes números: x; y z están en progresión geométrica; entonces se puede expresar: a; aq; $aq^2$.

Luego para obtener estos valores reemplazamos en los datos:

$$a+aq+aq^2=209 \wedge a^2+a^2q^2+a^2q^4=16093$$

Factorizando las ecuaciones:

$a(1+q+q^2)=209$.........(I)

$a^2(1+q^2+q^4)=16093$.....(II)

Luego para eliminar el valor de a; elevamos al cuadrado la ecuación (I) y dividimos con la ecuacón (II).

$$\frac{a^2(1+q+q^2)^2}{a^2(1+q^2+q^4)}=\frac{(209)^2}{16093}$$

Simplificando el valor de $a^2$

$$\frac{1+q+q^2}{1-q+q^2}=\frac{19}{7} \rightarrow \frac{1+q^2}{q}=\frac{13}{6}$$

Al resolver: $q=\dfrac{3}{2}$

Reemplazando en (I) a = 44

Luego los valores de x; y ; z serán respectivamente:

44 ; 66 ; 99

Nos piden: x + y – z = 11

*Clave:* **B**

**Problema 49**

Se tiene:

$\div$....56; 106.... ; $\div\div$....16 ; 32....

Los términos que ocupan el sexto lugar de estas progresiones son iguales y los términos que ocupan el cuarto lugar se diferencia en 92. Calcular el producto de los dos primeros términos de estas progresiones.

A) 24  B) 48  C) 12
D) 30  E) 44

***Resolución:***

Por dato se tienen las siguientes progresiones:

P.A. : .....56 ; 106 ;....
P.G. : .....16 ; 32 ;....

Entonces en la P.A.: Razón = r = 50

Sabemos que:

$a_6 = a_1 + 5r \rightarrow a_6 = a_1 + 250$.........(I)

$a_4 = a_1 + 3r \rightarrow a_4 = a_1 + 150$........(II)

De la P.G.:

Razón = q = 2

$t_6 = t_1 \cdot q^5 \rightarrow t_6 = t_1 \cdot 2^5$...............(III)

$t_4 = t_1 \cdot q^3 \rightarrow t_4 = t_1 \cdot 2^3$...............(IV)

Del dato:

$a_6 = t_6 \rightarrow a_1 + 250 = 32t_1$...............($\alpha$)

$a_4 - t_4 = 92 \rightarrow (a_1 + 150) - (t_1 \cdot 8) = 92$.....($\beta$)

Para obtener $t_1$ restamos las ecuaciones ($\alpha$) – ($\beta$):

$$100 + 8t_1 = 32t_1 - 92 \rightarrow t_1 = 8$$

Reemplazamos en ($\alpha$): $a_1 = 6$; nos piden:

$$a_1 \cdot t_1 = 6 \cdot 8 = 48$$

*Clave:* **B**

**Problema 50**

Determine cuatro números enteros sabiendo que forman una progresión geométrica; la suma de ellos es 255 y el exceso del tercero sobre el primero es 45. Dar como respuesta la suma del segundo y cuarto término.

A) 184  B) 195  C) 204
D) 207  E) 212

***Resolución:***

Sean los cuatro números que forman una progresión geométrica:

$$a \,;\, a \cdot q \,;\, a \cdot q^2 \,;\, a \cdot q^3$$

Por dato la suma de estos es:

$a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 = 255$

$a(1 + q + q^2 + q^3) = 255$..........(I)

También del dato:

$aq^2 - a = 45 \rightarrow a(q^2 - 1) = 45$......(II)

Para eliminar a dividimos las ecuaciones (I) $\div$ (II):

$$\frac{a(1+q)(1+q^2)}{a(1+q)(q-1)} = \frac{255}{45}$$

Simplificando: $\dfrac{q^2+1}{q-1} = \dfrac{17}{3}$

q = 4

Reemplazando en (II) conseguimos a=3

Luego nos piden:

$t_2 + t_4 \rightarrow aq + aq^3 = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^3 = 204$

*Clave:* **C**

**Problema 51**

Si a; $\dfrac{b}{2} + 2$; c estan en progresión



aritmética. ¿Cuánto debe ser x para que $\frac{1}{a(a+c)-b(b-c)}$; 1 ; (a + c)x esten en progresión geométrica?

A) 4 B) – 4 C) 3
D) – 3 E) 5

***Resolución:***

Si los siguientes términos: $a\ ;\ \frac{b}{2}+2\ ;\ c$

estan en progresión aritmética; entonces se cumple:

$$2\left(\frac{b}{2}+2\right)=a+c \rightarrow b+4=a+c ......(I)$$

También por condición del problema; los siguientes términos están en progresión geométrica:

$$\frac{1}{a(a+c)-b(b-c)}\ ;1;\ (a+b)\cdot x$$

Entonces se cumple:

$$(1)^2=\frac{1}{a(a+c)-b(b-c)}\cdot(a+b)\cdot x$$

$$1=\frac{1}{a^2+ac-b^2+bc}\cdot(a+b)x$$

Factorizando:

$$1=\frac{1}{(a+b)(a-b+c)}\cdot(a+b)x$$

Simplificando:

$$1=\frac{1}{a-b+c}\cdot x .................(II)$$

Pero de la ecuación (I) se sabe que:

$$a + c - b = 4$$

Reemplazando el dato en la ecuación

$$1=\frac{1}{4}\cdot x \rightarrow x=4$$

***Clave:*** **A**

**Problema 52**

Si $a_1$ ; $a_2$ ; $a_3$ ; $a_4$ son números naturales en progresión aritmética donde:

$$a_1+a_2+a_3+a_4=26 \quad y \quad a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4=880$$

Calcular: $N=a_1^2+a_2^2+a_3^3+a_4^4$

A) 184 B) 214 C) 216 D) 218 E) 195

***Resolución:***

Por dato del problema: $a_1;a_2;a_3;a_4$

Son números naturales en progresión aritmética; entonces sea:
r = razón. luego la P.A. se puede expresar:

$$a_1;a_1+r;a_1+2r;a_1+3r$$

Además también por dato:

(i) $a_1+a_2+a_3+a_4=26 \rightarrow a_1+a_1+r+a_1+2r+a_1+3r=26$

$4a_1+6r=26 \rightarrow 2a_1+3r=13 ................(I)$

(ii) $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4=880 \rightarrow a_1(a_1+r)(a_1+2r)(a_1+3r)=880......(II)$

De la ecuación (I): $2a_1 = 13 - 3r$

Como $a_1 \in \mathbb{N}$; entonces: $13 - 3r \geq 0$, de donde: $r \leq \frac{13}{3}$

Como r necesariamente es entero; entonces los posibles valores para r son:

Si: $r = 4 \rightarrow a_1 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

Si: $r = 3 \rightarrow a_1 = 2 \in \mathbb{N}$

Entonces para estos valores de: $r = 3 \wedge a_1 = 2$

Reemplazamos en la ecuación (II) vemos si verifican:

$$(2)\cdot(5)\cdot(8)\cdot(11) = 880$$

Como para estos valores verifican la ecuación, entonces:

$$N = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \rightarrow N = 2^2 + 5^2 + 8^2 + 11^2 = 214$$

***Clave:* B**

**Problema 53**

Sea el sistema:

$$2x + y + z = 40$$
$$3y - z = 10$$

Donde x; y; z son tres términos consecutivos de una progresión geométrica creciente; calcular xy/z

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{25}{4}$ C) $\frac{1}{10}$ D) $\frac{1}{15}$ E) $\frac{1}{20}$

***Resolución:***

Dado el sistema de ecuaciones:

$2x + y + z = 40$ ............(I)

$3y - z = 10$ .............(II)

Además por dato del problema: x; y ; z

Son tres términos consecutivos de una P.G.; entonces sea:

Razón = q ; $y = x \cdot q \wedge z = x \cdot q^2$

Reemplazamos en las ecuaciones (I) y (II)

En (I): $2x + xq + x \cdot q^2 = 40 \rightarrow x(2 + q + q^2) = 40$..........($\alpha$)

En (II): $3xq - xq^2 = 10 \rightarrow x(3q - q^2) = 10$....................($\beta$)

Luego para obtener el valor de «q» dividimos las ecuaciones.

$$\alpha \div \beta: \quad \frac{2+q+q^2}{3q-q^2}=4$$

Efectuando: $5q^2-11q+2=0$

Factorizando:

$$(5q-1)(q-2)=0 \rightarrow q=\frac{1}{5} \vee q=2$$

Por ser una progresión geométrica creciente: q = 2

Luego reemplazamos en ($\alpha$)

$$x=5 \rightarrow y=10 \ \wedge \ z=20$$

$$\therefore \quad \frac{xy}{z}=\frac{5}{2}$$

**Clave: A**

## Problema 54

Si los términos de lugares p; q; r de una progresión aritmética son a; b; c respectivamente. Determine el valor de:

$$M=(q-r)\cdot a+(r-p)\cdot b+(p-q)\cdot c$$

A) r B) p C) q
D) 1 E) 0

***Resolución:***

Sea la progresión aritmética: $t_1; t_2; t_3; ...$ cuya razón es h por dato del problema:

$t_p=t_1+(p-1)\cdot h=a$............(I)

$t_q=t_1+(q-1)\cdot h=b$.........(II)

$t_r=t_1+(r-1)\cdot h=c$............(III)

Luego para formar la expresión M debemos formar algunas ecuaciones con los valores que son datos; para eso restamos las ecuaciones:

(II) – (III): $(q-r)\cdot h=b-c \rightarrow q-r=\dfrac{b-c}{h}$

Para formar el primer término de la expresión M, multiplicamos por a:

$$(q-r)\cdot a=\frac{(b-c)\cdot a}{h} \text{..........}(\alpha)$$

En forma similar haremos:

(III) – (I): $(r-p)\cdot b=\dfrac{(c-a)\cdot b}{h}$..........($\beta$)

(I) – (II): $(p-q)\cdot c=\dfrac{(a-b)\cdot c}{h}$............($\theta$)

Finalmente la expresión M se formará al sumar las ecuaciones: $(\alpha)+(\beta)+(\theta)$

Entonces:

$$(q-r)\cdot a+(r-p)\cdot b+(p-q)\cdot c=\frac{0}{h}$$

$$\therefore M=0$$

**Clave: E**

## Problema 55

Tres números enteros están en progresión geométrica si al segundo se suma 2 se convierte en una progresión aritmética. Si a continuación en la progresión aritmética se suma al tercero 9. Vuelve a ser una progresión geométrica. Calcular los tres números e indicar la suma de los 10 primeros términos de la progresión aritmética.

A) 120 B) 210 C) 310
D) 420 E) 480

***Resolución:***

Sean los tres números en progresión geométrica: $a; aq; aq^2$

Luego por condición del problema:

$$a; aq+2; a\cdot q^2$$

Es una progresión aritmética; entonces se cumple:

$$2(aq+2)=a+a\cdot q^2$$

$4=a+aq^2-2aq$.............(I)

También del problema; los siguientes términos:

$$a; aq+2; aq^2+9$$

Forman una progresión geométrica, entonces se cumple:

$$(aq+2)^2 = a(aq^2+9)$$

Efectuando el binomio:

$$a^2q^2+4aq+4 = a^2\cdot q^2+9a$$

$$4 = 9a-4aq$$

$$4 = a(9-4q)............(II)$$

Luego de la ecuación (I) y (II):

$$4 = a(1+q^2-2q) \rightarrow 4 = a(9-4q)$$

Para obtener el valor de q dividimos las ecuaciones:

$$1 = \frac{1+q^2-2q}{9-4q}$$

$$9-4q = 1+q^2-2q \leftrightarrow q^2+2q-8=0$$

Entonces factorizando:

$$(q+4)(q-2)=0 \rightarrow q=2 \vee q=-4$$

Tomamos: q = 2; luego en la ecuación (II): $a=4$

La progresión aritmética será:

4; 10; 16; ........(razón = r = 6)

$$S_{10} = [2(4)+(9)(6)]\frac{10}{2} \rightarrow S_{10} = 310$$

*Clave:* C

**Problema 56**

Encontrar una progresión aritmética y una progresión geométrica; si se sabe que los primeros términos son iguales a 2; tienen el mismo tercer término; y el onceavo término de la progresión aritmética, es igual al quinto término de la progresión geométrica. Dar la suma de las razones de ambas progresiones.

A) 2  B) 3  C) 5
D) 8  E) 6

***Resolución:***

Sean las progresiones:

P.A.: $2; a_2; a_3; a_{11}; .....$(razón = r)

Entonces: $a_3 = 2+2r \wedge a_{11} = 2+10r$

P.G.: $2; t_2; t_3; ......; t_{11}........$(razón = q)

Entonces: $t_3 = 2\cdot q^2 \wedge t_5 = 2\cdot q^4$

Luego por dato del problema:

$$a_3 = t_3 \rightarrow 2+2r = 2\cdot q^2.......(I)$$

$$a_{11} = t_s \rightarrow 2+10r = 2\cdot q^4.....(II)$$

Para obtener el valor de q ; hacemos (II) – 5(I)

Al restar las ecuaciones se obtiene:

$$-8 = 2\cdot q^4 - 10q^2$$

$$q^4-5q^2+4=0$$

Luego para: $q=2 \vee q=-2$; el valor de $q^2=4$

Reemplazando en la ecuación (I): r=3

Nos piden la suma de ambas razones:

q + r = 5

*Clave:* C

**Problema 57**

Calcular el mayor número de términos que puede tener una progresión aritmética, cuyos términos suman 50 y cuya razón y último término son los valores límites de las siguientes series respectivamente:

$$A = 1+0,5+0,25+0,125+...$$

$$B = 7+3,5+1,75+0,875+...$$

A) 5  B) 10  C) 15
D) 20  E) 25

***Resolución:***

Primero calculemos los valores de A y B:

$$A = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....$$



Esta es una adición de términos de una progresión geométrica decreciente ilimitada de razón igual a 1/2, entonces:

$$A=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\rightarrow A=2$$

Hagamos algo similar para B:

$$B=7+\frac{7}{2}+\frac{7}{4}+\frac{7}{8}+....$$

Razón = $\frac{1}{2}\rightarrow B=\frac{7}{1-\frac{1}{2}}\rightarrow B=14$

Supongamos que la P.A. pedida posee n términos; luego del dato del problema.

$$S_n=50\ ;\ r=2\ \text{ y }\ a_n=14$$

Pero la suma de los n primeros términos en la P.A., se puede calcular:

$$S_n=\frac{\left[2a_n-(n-1)r\right]}{2}n\rightarrow 50=15n-n^2$$

$$n^2-15n+50=0$$

Factorizando:

$$(n-10)(n-5)=0\rightarrow n=10\vee n=5$$

Entonces el mayor número de términos es 10.

*Clave:* **B**

**Problema 58**

En la progresión geométrica creciente de cuatro términos; la suma de sus extremos es 140 y la suma de los términos adjuntamos que equidistan de los extremos es 60. Calcular el primer término.

A) 4 B) 5 C) 10
D) 15 E) 45

***Resolución:***

Sean los elementos de la progresión geométrica creciente.

$$t_1\ ;\ t_1q\ ;\ t_1q^2\ ;\ t_1q^3$$

Como la P.G. es creciente; entonces q >1

También por dato del problema:

(i) $t_1+t_1q^3=140\rightarrow t_1(1+q^3)=140$.....(I)

(ii) $t_1q+t_1q^2=60\rightarrow t_1\cdot q(1+q)=60$.....(II)

Luego para conseguir el valor de q dividimos las ecuaciones (I) ÷ (II):

$$\frac{t_1(1+q)(1-q+q^2)}{t_1\cdot q\,(1+q)}=\frac{140}{60}$$

Simplificando:

$$\frac{1-q+q^2}{q}=\frac{7}{3}\rightarrow 3q^2-10q+3=0$$

$$(3q-1)(q-3)=0\rightarrow q=1/3\ \vee\ q=3$$

Como: $q>1\rightarrow q=3$

Luego para obtener $t_1$ reemplazamos el valor de q en la ecuación (II):

$$t_1(3)\cdot(4)=60$$

$$\therefore\ t_1=5$$

*Clave:* **B**

**Problema 59**

Si:

$\div\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}$........ Progresión aritmética

$\div a\cdot b+1\cdot c$........Progresión aritmética

$\div\div\left(a-\frac{1}{2}\right)\cdot b\cdot c$...Progresión geométrica

Calcular: a + b + c

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 11

***Resolución:***

Si los siguientes términos forman una progresión aritmética:

$$\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}$$

Entonces:

$$2\left(\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\rightarrow\frac{2}{b}=\frac{a+c}{ac}......(I)$$

También: $a\,;(b+1)\,;c$

Entonces:

$2(b+1)=a+c..........(II)$

Con los términos que forman una progresión geométrica:

$$(b)^2=(a-\frac{1}{2})c\rightarrow 2b^2=(2a-1)\cdot c......(III)$$

Luego para obtener los valores de a; b; c; reemplazamos la ecuación (II) en (I):

$$\frac{2}{b}=\frac{2(b+1)}{ac}\rightarrow 2ac=2b^2+2b........(IV)$$

De la ecuación (III) y (IV):

$$2b^2+c=2ac\wedge 2b^2+2b=2ac\rightarrow c=2b$$

Reemplazando en la ecuación (II):

$$2(b+1)=a+2b\rightarrow a=2$$

En la ecuación (III):

$$2b^2=3c\rightarrow 2b^2=3(2b)\rightarrow b=3$$

Entonces: c = 6

Nos piden: a + b + c = 2 + 3 + 6 = 11

***Clave:* E**

**Problema 60**

En un cuadrado de lado a se inscribe una circunferencia; en este se inscribe un cuadrado y en el segundo cuadrado se inscribe una circunferencia, asi sucesivamente. Calcule la suma de las áreas de todas las figuras.

A) $\frac{a^2}{2}(\pi+1)$ B) $\frac{a^2}{2}(2+\pi)$

C) $\frac{a^2}{2}(3+\pi)$ D) $\frac{a^2}{2}(4+\pi)$

E) $\frac{a^2}{2}(5+\pi)$

***Resolución:***

Por condición del problema, se tiene un cuadrado de lado a y en él se inscribe una circunferencia. Luego en la circunferencia de inscribe un cuadrado, luego en el segundo cuadrado se inscribe otra circunferencia y así sucesivamente.

Podemos notar que el área de los cuadrados con:

1° cuadrado : $a^2$

2° cuadrado : $\frac{a^2}{2}$

3° cuadrado : $\frac{a^2}{4}$

⋮

Como nos piden en la suma de las áreas de todos los cuadrados:

$$\text{Área total}=a^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...\right)=a^2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

Área total = $2\cdot a^2$

Luego para los círculos ocurre algo similar que en los cuadrados:

$$\text{Área}_1=\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi\cdot a^2}{4}$$

$$\text{Área}_2=\pi\cdot\left(\frac{a}{4}\sqrt{2}\right)^2=\frac{\pi\cdot a^2}{8}$$

⋮

$$\text{Área}_{\text{total}} = \frac{\pi \cdot a^2}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+....\right) = \frac{\pi \cdot a^2}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\pi \cdot a^2}{2}$$

Luego la suma de áreas será:

$$S_{\text{total}} = 2a^2 + \frac{\pi \cdot a^2}{2} = \frac{a^2}{2}(4+\pi)$$

*Clave:* **D**

**Problema 61**

Marcar verdadero (V) o falso (F)

I) La sucesión: $\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\} n \geq 1$ es convergente .................( )

II) La sucesión: $\left\{\frac{n}{n+2}\right\} n \geq 1$ es divergente ....................( )

III) La sucesión: $\left\{\left(\frac{7}{2}\right)^{n+1}\right\} n \geq 1$ es convergente ..............( )

A) VVF B) FVF C) VVV D) VFF E) FFV

***Resolución:***

Para analizar (I) y (II) es necesario recordar lo expuesto en el capítulo del límite de una función.

Veamos: $$\lim_{n\to\infty}(b^n) = \begin{cases} \infty \ ; \ b > 1 \\ 0 \ ; -1 < b < 1 \end{cases}$$

Ahora con cada proposición:

I) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0 \rightarrow \left\{\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}_{n\geq 1}$ es convergente

II) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right) = 1 \rightarrow \left\{\frac{n}{n+2}\right\}_{n\geq 1}$ es convergente

III) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{2}\right)^{n+1} = \infty \rightarrow \left\{\left(\frac{7}{2}\right)^{n+1}\right\}_{n\geq 1}$ es divergente.

Finalmente la secuencia será:

I) V II) F III) F

*Clave:* **D**

**Problema 62**

Estudiar la convergencia o divergencia de la sucesión:

$\left\{ n \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}_{n\geq 1}$ ¿A qué valor converge?

A) 1  B) $\pi$  C) $\frac{\pi}{2}$  D) $\frac{\pi}{4}$  E) $3\pi$

***Resolución:***

De acuerdo con lo expuesto en la teoria procedemos del modo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\cdot \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right]$$

Hagamos: $\frac{1}{n} = x$

Observar que si: $n\to\infty$, entonces $x\to 0$

Luego:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\cdot \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{Sen}(\pi\cdot x)}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\pi\cdot \operatorname{Sen}(\pi\cdot x)}{(\pi\cdot x)}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\cdot \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] = \pi\cdot \lim_{(x\to 0)}\left[\frac{\operatorname{Sen}(\pi\cdot x)}{\pi\cdot x}\right] = \pi\cdot 1 = \pi$$

Como: $\lim_{n\to\infty}\left[n\cdot \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] = \pi$ ¡Esta determinado!

$$\therefore \left\{n\cdot \operatorname{Sen}\left(\frac{5}{n}\right)\right\}_{n\geq 1} \text{ converge a } \pi$$

***Clave:*** **B**

**Problema 63**

Con respecto a la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right)$ se afirma:

A) Converge a 2  B) Converge a 1  C) Converge a cero
D) Converge a 1/2  E) Es divergente



***Resolución:***
De acuerdo con lo expuesto en la teoría:

Hallemos el límite de $a_n$: $a_n = \dfrac{n^3+1}{n^3+2}$

Veamos: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3+2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{n^3}}{1+\dfrac{2}{n^3}}\right) = \dfrac{1+0}{1+0} = 1$

Notar que: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3+2}\right) = 1 \neq 0$

$\therefore$ La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3+2}\right)$ es divergente **Clave: E**

**Problema 64**
La sucesión:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{4}{5}}+\ldots+\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right)\right\}_{n\geq 1}$$

Converge a:
A) 1/4 B) 1/2 C) 1/8 D) 1/16 E) 1/32

***Resolución:***
Hagamos de cuenta que la sucesión converge a k; luego se plantea.

$$K = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{4}{5}}+\ldots\ldots+\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right)\right]$$

Con la finalidad de utilizar el teorema de la media aritmética multiplicamos y dividimos por «n» a la expresión a evaluar; veamos:

$$K = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{\sqrt{4n^2+1}}\left(\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{4}{5}}+\ldots\ldots+\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}}{n}\right)\right]$$

$$K = \left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{4n^2+1}}\right)\right]\cdot\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{4}{5}}+\ldots+\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}}{n}\right)\right]$$

Por el teorema de la media aritmética tenemos:

$$K = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{4n^2+1}}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right)$$

Ahora calculando cada límite se consigue:

$$k = \frac{1}{2}\cdot 1$$

$$\therefore\ k = \frac{1}{2}$$

*Clave:* **B**

**Problema 65**

Calcular el límite de la siguiente sucesión:

$$\left\{\sqrt[n]{\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{10}{17}\cdots\frac{3n+1}{5n+2}}\right\}_{n\geq 1}$$

A) 1/2 B) 3/5 C) 2/5 D) 5/3 E) $\nexists$ límite

***Resolución:***

Sea k el límite de la sucesión; luego se plantea:

$$k = \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n]{\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{10}{17}\cdots\frac{3n+1}{5n+2}}\right]$$

Observar que: $a_1 = \frac{4}{7}$; $a_2 = \frac{7}{12}$; $a_3 = \frac{10}{17}\cdots a_n = \frac{3n+1}{5n+2}$

Luego dando uso del teorema de la media geométrica tenemos:

$$k = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+2}\right)$$

$$\therefore\ K = \frac{3}{5}$$

*Clave:* **C**

**Problema 66**

La serie: $\sum_{k=1}^{n}[k(k+3)]^{-1}$ cuando «n» crece ilimitadamente converge a:

A) $\frac{11}{8}$ B) $\frac{11}{6}$ C) $\frac{11}{18}$ D) $\frac{13}{18}$ E) La serie es divergente

***Resolución:***

Nuestra estrategia para resolver este problema consistirá en encontrar una expresión equivalente a la suma:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[k(k+3)\right]^{-1}$$

Para luego hacer tender «n» al infinito ($n \to \infty$) y de este modo analizar su convergencia; veamos:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}[k(k+3)]^{-1} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+3)}\right] = \left(\frac{1}{3}\right)\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{3}{k(k+3)}\right]$$

$$S_n = \left(\frac{1}{3}\right)\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right)\right\}$$

Teniendo en cuenta a la propiedad telescópica sobre sumatorias procedemos así:

$$S_n = \frac{1}{3}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right)\right]\right\}$$

$$S_n = \frac{1}{3}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right)\right\}$$

$$S_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{3}\left(\frac{11}{16} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$

Ahora si: $n \to \infty$ tenemos:

$$S_{n\to\infty} = \frac{1}{3}\left(\frac{11}{3} - 0 - 0 - 0\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{11}{6}\right)$$

$$\therefore\ S_{n\to\infty} = \frac{11}{18}$$

**Clave: C**

**Problema 67**

La sucesión:

$$\left\{\frac{\sqrt{3n+1}\cdot\sqrt{n+7}^{\,2n+1}}{\left(3n\cdot\sqrt{n^2+5}\right)(n+3)^n}\right\}_{n\geq 1}$$

Converge a:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}e^2$ B) $\frac{\sqrt{3}}{4}e^4$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}e^4$ D) $\frac{\sqrt{3}}{4}e^2$ E) $\frac{\sqrt{3}}{4}e$

***Resolución:***

Tener en cuenta que:

$$a_n = \frac{\sqrt{3n+1}\cdot\sqrt{n+7}^{\,2n+1}}{\left(3n+\sqrt{n^2+5}\right)(n+3)^n}$$

Ahora procedemos a calcular:

$$L = \lim_{n\to\infty}(a_n)$$

Veamos:

$$L = \lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{3n+1}\cdot\sqrt{n+7}^{\,2n+1}}{\left(3n+\sqrt{n^2+5}\right)(n+3)^n}\right]$$

$$L = \lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{3n+1}\cdot\sqrt{n+7}\cdot\sqrt{n+7}^{\,2n}}{\left(3n+\sqrt{n^2+5}\right)(n+3)^n}\right]$$

$$L = \lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{(3n+1)(n+7)}\cdot(n+7)^n}{\left(3n+\sqrt{n^2+5}\right)(n+3)^n}\right]$$

$$L = \lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{\sqrt{3n^2+22n+7}}{3n+\sqrt{n^2+5}}\right)\cdot\left(\frac{n+7}{n+3}\right)^n\right]$$

Aplicando propiedad de límites tenemos:

$$L = \lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{3n^2+22n+7}}{3n+\sqrt{n^2+5}}\right]\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+7}{n+3}\right)^n$$

$$L = \lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3n^2+22n+7}}{3n+\sqrt{n^2+5}}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left[\left(1+\frac{4}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{4}}\right]^{\frac{4n}{n+3}}\right]$$

$$L = \lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3n^2+22n+7}}{3n+\sqrt{n^2+5}}\right)\cdot\left\{\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{4}}\right]\right\}^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n}{n+3}\right)}$$



Ahora en el límite conseguimos:

$$L = \lim_{n\to\infty} (a_n) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3+1}\right) \cdot \{e\}^4 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot e^4$$

$\therefore \quad \{a_n\}_{\geq 1}$ es convergente y convergente a $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot e^4$

*Clave:* **B**

**Problema 68**

Si: $n \to \infty$ la expresión:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Equivale a:

A) 1/2 B) 1/4 C) 1 D) 3/2 E) 2

***Resolución:***

El problema establece calcular L, siendo:

$$L = \lim_{n\to\infty} (a_n)$$

Donde:

$$a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

Este límite lo obtendremos acotando; veamos:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

Sumando:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Tomando límites tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\right) \leq \lim_{n\to\infty}(a_n) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$$

De donde:

$$1 \leq \lim_{n\to\infty}(a_n) \leq 1$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}(a_n) = 1$$

***Clave:* C**

**Problema 69**

La siguiente serie: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente; calcular su suma si:

$$a_n = \text{Cos}\left(\frac{2n+1}{n^2+n}\right)\cdot \text{Sen}\left(\frac{1}{n^2+n}\right)$$

A) Sen(2)  B) $\frac{\text{Sen}(3)}{3}$  C) $\frac{\text{Sen}(4)}{2}$  D) $\frac{\text{Sen}(2)}{4}$  E) $\frac{\text{Sen}(2)}{2}$

***Resolución:***

Por condición:

$$a_n = \text{Cos}\left(\frac{2n+1}{n^2+n}\right)\cdot \text{Sen}\left(\frac{1}{n^2+n}\right)$$

Recordemos lo siguiente equivalencia trigonométrica:

$$\text{Sen}A\cdot\text{Cos}B = \frac{1}{2}\left[\text{Sen}(A+B)+\text{Sen}(A-B)\right]$$

Ahora en el problema tenemos:

$$a_n = \frac{1}{2}\left[\text{Sen}\left(\frac{1}{n^2+n}+\frac{2n+1}{n^2+n}\right)+\text{Sen}\left(\frac{1}{n^2+n}-\frac{2n+1}{n^2+n}\right)\right]$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left[\text{Sen}\left(\frac{2n+2}{n^2+n}\right)+\text{Sen}\left(\frac{-2n}{n^2+n}\right)\right]$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left[\text{Sen}\left(\frac{2}{n}\right)-\text{Sen}\left(\frac{2}{n+1}\right)\right]$$

De donde: $$a_k = \frac{1}{2}\left[\text{Sen}\left(\frac{2}{k}\right)-\text{Sen}\left(\frac{2}{k+1}\right)\right]$$

Tomando sumatoria:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\text{Sen}\left(\frac{2}{k}\right)-\text{Sen}\left(\frac{2}{k+1}\right)\right]$$



Por la propiedad telescópica se establece que:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\left[\operatorname{Sen}\left(\frac{2}{1}\right) - \operatorname{Sen}\left(\frac{2}{n+1}\right)\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\left[\operatorname{Sen}(2) - \operatorname{Sen}\left(\frac{2}{n+1}\right)\right]$$

Ahora si: $n \to \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}(\operatorname{Sen}(2) - \operatorname{Sen}0) = \frac{1}{2}(\operatorname{Sen}(2) - 0)$$

$$\therefore \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\operatorname{Sen}(2)}{2}$$

***Clave:*** **E**

## Problema 70

En una sucesión aritmética: 24, 10 y 105 son el último término; el número de términos y su suma respectivamente. ¿Cuál es el producto del primer término por la razón en dicha sucesión?

A) – 5 B) 5 C) – 1
D) – 9 E) 9

***Resolución:***

De acuerdo con el enunciado se pide:

$a_1 \cdot r$......................(1)

Por dato:

$$a_{10} = 24 \ ; n = 10 \wedge S_{10} = 105$$

Se sabe que:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$a_{10} = a_1 + (10-1)r$

$24 = a_1 + 9r$............(2)

Támbién:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n$$

$$S_{10} = \left(\frac{a_1 + a_{10}}{2}\right)\cdot 10$$

$105 = (a_1 + 24)\cdot 5$

$21 = a_1 + 24$

$a_1 = -3$..................(3)

Reemplazando (3) en (2) conseguimos:

$$24 = -3 + 9r$$
$$r = 3$$

Finalmente en (1) tenemos:

$$a_1 \cdot r = (-3)(3)$$

$$\therefore \ a_1 = -9$$

***Clave:*** **D**

## Problema 71

El septimo término de una sucesión aritmética decreciente constituye el 80% del tercer término de la misma sucesión y su producto es igual a 80. ¿Cuántos términos hay que tomar de esta sucesión para que su suma sea igual a 50?

A) 5 B) 40 C) 5 ó 40
D) 10 ò 40 E) 10

***Resolución:***

Consideremos la siguiente progresión aritmética de «n» términos:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \ldots\ldots\ldots\ldots a_n$$

Por condición:

$a_7 = 80\%\, a_3 \to a_7 = \frac{4}{5}a_3$..........(1)

$(a_7)(a_3) = 80$..........................(2)

Reemplazando (1) en (2) tenemos:

$$\left(\frac{4}{5}a_3\right)(a_3) = 80 \to (a_3)^2 = 100$$

De donde:

$a_3 = 10 \vee a_3 = -10$................(3)

Reemplazando (3) en (2):

Si: $a_3 = 10 \to a_7 = 8$..............(4)

Si: $a_3 = -10 \to a_7 = -8$..........(5)

Por condición la P.A. es decreciente; luego solo es valido (4).
Se sabe que:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$\left.\begin{aligned} \text{Sea}: n = 3 \rightarrow a_3 = a_1 + 2r \\ \text{Sea}: n = 7 \rightarrow a_7 = a_1 + 6r \end{aligned}\right\} ......(6)$$

Reemplazando (4) en (6) conseguimos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_1 + 2r = 10 \\ a_1 + 6r = 8 \end{cases}$$

Resolviendo se obtiene:

$$a_1 = 11 \wedge r = -\frac{1}{2}$$

De acuerdo con lo expuesto en la teoría la suma de los «n» primeros términos de una P.A. se puede calcular asi:

$$S_n = \left[\frac{2a_1 + (n-1)r}{2}\right]n$$

Ahora reemplazando datos conseguimos:

$$50 = \left[\frac{2(11) + (n-1)(-1/2)}{2}\right]n$$

$$100 = \left(22 - \frac{n-1}{2}\right)n$$

$$200 = 44n - n^2 + n$$

$$n^2 - 45n + 200 = 0$$

$$(n-5)(n-40) = 0 \rightarrow n = 5 \vee n = 40$$

Como el problema se menciona al septimo término

$$n \geq 7$$

$$\therefore \quad n = 40$$

***Clave:* B**

**Problema 72**

Si: $\frac{2}{5}; \frac{1}{2m-1}; \frac{5}{4}$ son tres términos consecutivos de una P.H.

¿Cuál es el valor de m?

A) 5,3 B) $\frac{53}{20}$ C) $\frac{53}{30}$

D) $\frac{53}{40}$ E) $\frac{40}{53}$

***Resolución:***

De acuerdo co lo expuesto en la teoria debemos recordar que los recíprocos de los términos dados forman una P.A.; veamos:

$$\frac{5}{2} \cdot (2m-1) \cdot \frac{4}{5}$$

Luego por la propiedad de la razón se tiene:

$$(2m-1) - \frac{5}{2} = \frac{4}{5} - (2m-1)$$

$$(2m-1) + (2m-1) = \frac{4}{5} + \frac{5}{2}$$

$$4m - 2 = \frac{33}{10}$$

$$4m = \frac{33}{10} + 2$$

$$4m = \frac{53}{10}$$

$$\therefore \quad m = \frac{53}{40}$$

***Clave:* D**

**Problema 73**

Sabiendo que:
∺ a : b : c : d ; además a – d = 7
Calcular el valor de:

$$w = (a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2$$

A) 19 B) 14 C) 21
D) 49 E) 34

***Resolución:***

Por ser P.G. : ∺ a : b : c : d
Sea:

q = razón $\rightarrow$ $b = aq$ ; $c = aq^2 \wedge d = aq^3$

Por condición:

$a-d=7 \rightarrow a-aq^3=7$..............(1)

Se pide:

$$w=(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2$$

Es decir:

$$w=\left(a-aq^2\right)^2+\left(aq-aq^2\right)^2+\left(aq-aq^3\right)^2$$

Desarrollando cada potencia tenemos:

$$w=a^2-2a^2q^2+a^2q^4+a^2q^2-2a^2q^3+a^2q^4+a^2q^2-2a^2q^4+a^2q^6$$

Reduciendo los términos señalados conseguimos:

$$w=a^2-2a^2q^3+a^2q^6$$

Nótese que:

$$w=\left(a-aq^3\right)^2 \text{..................(2)}$$

Reemplazando (1) en (2):

$$w=(7)^2$$

$$\therefore\ w=49$$

**Clave: D**

**Problema 74**

En una P.G. de cuatro términos, la suma de los dos primeros es 1 y la de los dos últimos es 16. ¿Cuál es el mayor término?

A) 64/5 B) 64/3 C) 81/5
D) 68/3 E) 90/7

***Resolución:***

Sea la P.G.:

$$\div\div\ t_1 : t_1q : t_1q^2 : t_1q^3$$

Por condición:

$t_1+t_1q=1 \rightarrow t_1(1+q)=1$.....................(1)

$t_1q^2+t_1q^3=16 \rightarrow t_1q^2(1+q)=16$.......(2)

Si se divide (2) entre (1) se consigue:

$$\frac{t_1q^2(1+q)}{t_1(1+q)}=\frac{16}{1} \rightarrow q^2=16 \rightarrow q=4 \text{.....(3)}$$

Reemplazando (3) en (1) tenemos:

$$t_1(5)=1 \rightarrow t_1=\frac{1}{5}$$

Finalmente la P.G. es:

$$\div\div\ \frac{1}{5} : \frac{4}{5} : \frac{16}{5} : \frac{64}{5}$$

**Clave: A**

**Problema 75**

El número de términos de una P.G. es 6 la suma de todos ellos es 364 y la diferencia entre el cuarto término y el tercero es igual al sextuplo del segundo. ¿Cuál es el primer término?

A) 1 B) 52/3 C) 2
D) 4 E) $A \vee B$

***Resolución:***

Sea la P.G.:

$$\div\div\ t_1 : t_1q : t_1q^2 : t_1q^3 : t_1q^4 : t_1q^5$$

Por condición:

$$S_6 = 364$$

Por propiedad:

$$S_6 = t_1\left(\frac{q^6-1}{q-1}\right)$$

$$t_1\left(\frac{q^6-1}{q-1}\right) = 364 \text{..................(1)}$$

Por condición:

$$t_4 - t_3 = 6t_2$$

Es decir:

$$t_1q^3 - t_1q^2 = 6t_1q$$

$$t_1q(q^2-q) = 6t_1q$$

Simplificando:

$$q^2 - q = 6 \rightarrow q^2 - q - 6 = 0$$

$$(q-3)(q+2) = 0 \rightarrow q = 3 \vee q = -2$$

si q = 3 ; en (1):

$$t_1 \cdot \left(\frac{728}{2}\right) = 364 \rightarrow t_1 = 1$$

si q = – 2; en (1):

$$t_1 \cdot \left(\frac{63}{-3}\right) = 364 \rightarrow t_1 = -\frac{52}{3}$$

$$\therefore \ t_1 = 1 \vee t_1 = -\frac{52}{3}$$

*Clave:* **A**

**Problema 76**

Calcule el número de términos de una P.G. de razón 2 siendo 189 la suma de ellos y la suma de sus cuadrados es 12285.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

***Resolución:***

De acuerdo con lo expuesto en la teoria el enunciado de este problema nos sugiere formar dos P.G; veamos.

$$\div\div t_1 : 2t_1 : 2^2t_1 : \text{..........} : 2^{n-1}t_1 \text{..........(1)}$$

$$\div\div t_1^2 : 4t_1^2 : 4^2t_1^2 : \text{.........} : 4^{n-1}t_1^2 \text{.........(2)}$$

Por condición se plantea para (1):

$$t_1\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right) = 189$$

$$t_1\left(2^n-1\right) = 189 \text{...........(3)}$$

Por condición se plantea para (2):

$$t_1^2\left(\frac{4^n-1}{4-1}\right) = 12285 \text{...........(4)}$$

Elevamos aam de (3) al cuadrado:

$$t_1^2\left(2^n-1\right)^2 = 189 \cdot 189 \text{...........(5)}$$

Si se divide (4) entre (5) conseguimos:

$$\frac{t_1^2\left(4^n-1\right)}{t_1^2\left(2^n-1\right)^2} = \frac{3 \cdot 12285}{189 \cdot 189}$$

$$\frac{\left(2^n+1\right)\left(2^n-1\right)}{\left(2^n-1\right)^2} = \frac{65}{63}$$

$$\frac{2^n+1}{2^n-1} = \frac{65}{63}$$

De donde:

$$2^n = 64$$

$$\therefore \ n = 6$$

*Clave:* **B**



## Problema 77

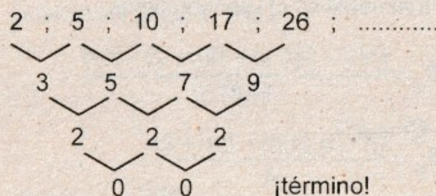
Hallar el vigésimo término de la P.A.:

2 ; 5 ; 10 ; 17 ; 26 ; ...............

A) 399 B) 407 C) 401
D) 504 E) 473

***Resolución:***

Examinando cuidadosamente a la sucesión dada podemos notar que estamos frente a una P.A.O.S




Observar que:

$$a_1 = 2 \;;\; \overset{1}{\triangle}_1 = 3 \;;$$

$$\overset{2}{\triangle}_1 = 2 \;\wedge\; \overset{3}{\triangle}_1 = 0$$

De acuerdo con lo expuesto en la teoría, el término de lugar «n», viene dado por:

$$a_n = a_1 + \overset{1}{\triangle}_1 C_1^{n-1} + \overset{2}{\triangle}_1 C_2^{n-1} + \overset{3}{\triangle}_1 C_3^{n-1}$$

Como se pide el vigésimo término; n=20

$$a_{20} = 2 + 3C_1^{19} + 2C_2^{19} + 0C_3^{19}$$

$$a_{20} = 2 + 3 \cdot 19 + 19 \cdot 18 + 0$$

$$\therefore\; a_{20} = 401$$

***Clave: C***

## Problema 78

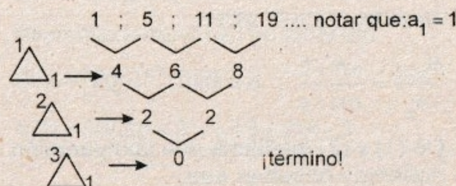
Hallar el término general de la siguiente P.A.

1 ; 5 ; 11 ; 19 ; ...........

A) $n^2 - n - 1$ B) $n^2 + n - 1$
C) $n^2 + 2n - 3$ D) $n^2 + n - 2$
E) $2n^2 - 3n - 1$

***Resolución:***

En la P.A.O.S se pide $a_n$ luego procedemos asi:




Finalmente $a_n$ viene dado por:

$$a_n = a_1 + \overset{1}{\triangle}_1 C_1^{n-1} + \overset{2}{\triangle}_1 C_2^{n-1} + \overset{3}{\triangle}_1 C_3^{n-1}$$

$$a_n = 1 + 4C_1^{n-1} + 2C_2^{n-1} + 0\,C_3^{n-1}$$

$$a_n = 1 + 4(n-1) + (n-1)(n-2) + 0$$

$$a_n = 1 + 4n - 4 + n^2 - 3n + 2$$

$$\therefore\; a_n = n^2 + n - 1$$

***Clave: B***

## Problema 79

Verificar si la sucesión:

$1 \cdot 2 \cdot 3$ , $2 \cdot 3 \cdot 4$ , $3 \cdot 4 \cdot 5$,....,$k \cdot (k+1) \cdot (k+2)$

es hipergeometrica.

***Resolución:***

De la sucesión:

$$a_n = n(n+1)(n+2)$$

$$a_{n+1} = (n+1)(n+2)(n+3)$$

Nótese que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+3}{n}\text{......................}(1)$$

De acuerdo con lo expuesto en la teoria. Si la sucesión dada es hipergeométrica, se debe cumplir que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma}\ ;\ \alpha\neq 0\text{...........}(2)$$

De (1) y (2) mediante una comparación podemos observar que:

$$\alpha=1\ ;\ \beta=3\wedge\gamma=0$$

∴ Como $\alpha\neq 0$, la sucesión dada es hipergeométrica.

**Problema 80**

Con respecto al problema anterior. Calcular la suma de los «n» primeros términos de la sucesión.

A) $\dfrac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{2}$

B) $\dfrac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{4}$

C) $\dfrac{n^4-6n^3+11n^2-6n}{2}$

D) $\dfrac{n^4-6n^3+11n^2-6n}{4}$

E) $\dfrac{n^4+11n^2+6}{4}$

***Resolución:***

La sucesión dada es:

$1\cdot2\cdot3\ ,\ 2\cdot3\cdot4\ ,\ 3\cdot4\cdot5\ ,....k\cdot(k+1)\cdot(k+2)$

De acuerdo con lo expuesto en la teoria; la suma de los «n» primeros términos viene dado por:

$$S_n=\frac{(n\alpha+\beta)a_n-\gamma a_1}{\alpha+\beta-\gamma}\text{................}(1)$$

Teniendo en cuenta al problema anterior:

$\alpha=1\ ;\ \beta=3\ ;\ \gamma=0\ ;\ a_1=1\cdot2\cdot3=6\wedge a_n=n(n+1)(n+2)$

Finalmente en (1) conseguimos:

$$S_n=\frac{[n(1)+3]n\ (n+1)(n+2)-0\cdot6}{1+3-0}$$

$$S_n=\frac{(n+3)\ (n)(n+1)(n+2)}{4}$$

$$\therefore\ S_n=\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{4}$$

***Clave:*** **B**

**Problema 81**

Indicar el término que ocupa la posición 210 en la siguiente PH.

$\frac{1}{7}\ ;\ \frac{1}{15}\ ;\ \frac{1}{23}\ ;\ \frac{1}{31}$..............

A) $\dfrac{1}{1679}$ B) $\dfrac{1}{1681}$ C) $\dfrac{1}{1683}$

D) $\dfrac{1}{1685}$ E) $\dfrac{1}{1769}$

***Resolución:***

Tomamos los recíprocos de cada término de la PH, pues de ese modo se formará una P.A.

$7\cdot15\cdot23\cdot31$..................

Nótese que:

$$a_1=7\ \wedge\ r=8$$



Hallemos el término que ocupa la posición 210, es decir: $a_{210}$

Se sabe que:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$n = 210 : a_{210} = a_1 + (209)r$$

$$a_{210} = 7 + (209)(8)$$

$$a_{210} = 1679$$

Finalmente el término que ocupa la posición 210 en la PH es:

$$\therefore \frac{1}{1679}$$

***Clave:* A**

## Problema 82

En la P.A : 3.............30..............b

El número de términos comprendidos entre 3 y 30 es igual a los comprendidos entre 30 y b. Si además la suma de todos los términos es 570.

Hallar la razón.

A) 2 B) 3 C) 6

D) 9 E) 4

***Resolución:***

Por condición se plantea:

$$3\cdot\underbrace{\ldots\ldots}_{\text{"m" términos}}\cdot 30\cdot\underbrace{\ldots\ldots}_{\text{"m" términos}}\ b$$

Se sabe que:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

En el primer tramo:

$$a_n = 30 \ ; \ a_1 = 3 \ \wedge \ n = m+2$$

Ahora en (1):

$$30 = 3 + (m+2-1)r \rightarrow (m+1)r = 27 \ldots..(2)$$

También:

$$S_n = \left[\frac{2a_1 + (n-1)r}{2}\right]n \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

En la P.A:

$$a_1 = 3 \ ; \ n = 2m+3 \ \wedge \ S_n = 570$$

Ahora en (3):

$$570 = \left[\frac{2(3) + (2m+3-1)r}{2}\right](2m+3)$$

$$570 = \left[3 + (m+1)r\right](2m+3) \ldots\ldots\ldots(4)$$

Reemplazando (2) en (4) tenemos:

$$570 = \left[3 + 27\right](2m+3)$$

$$570 = 30(2m+3) \rightarrow 19 = 2m+3$$

De donde: $m = 8$.....................(5)

Finalmente (5) en (2):

$$(8+1)r = 27 \rightarrow 9r = 27$$

$$\therefore \ r = 3$$

***Clave:* B**

## Problema 83

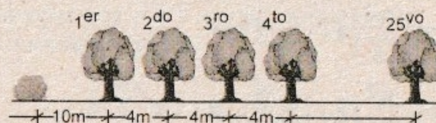
Una persona debe llevar una carretilla de arena al pie de cada uno de los 25 árboles que estan al lado de una calzada los árboles estan a 4m de distancia y la cantera de arena esta a 10m antes del primer árbol. ¿Qué distancia habrá recorrido la persona después de haber terminado su trabajo y vuelto la carretilla a la cantera?

A) 2 100 B) 2300 C) 2 900

D) 2 600 E) 3100

***Resolución:***

Ilustremos nuestro problema:







Recorrido para el: Ida + vuelta = total

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1er árbol | 10 | 10 | 20 |
| 2do árbol | 14 | 14 | 28 |
| 3er árbol | 18 | 18 | 36 |
| ⋮ | | | |

Nótese que estamos frente a una P.A donde tenemos:

$$a_1 = 20 \quad \wedge \quad r = 8$$

La distancia recorrida por la persona viene dada por la suma de los 25 primeros términos de la P.A. formada; veamos:

$$S_{25} = \left[\frac{2(20)+(25-1)(8)}{2}\right]\cdot 25$$

$$S_{25} = (20+24\cdot 4)25$$

$$S_{25} = 116\cdot 25$$

$$\therefore \quad S_{25} = 2900\,\text{m}$$

*Clave:* **C**

**Problema 84**

En un circulo de radio «R» se inscribe un triángulo equilátero en este se inscribe un triángulo y en este segundo circulo se inscribe un nuevo triángulo equilatero y asi sucesivamente. Calcular la suma limite de las àreas de todas las figura asì formadas.

A) $\frac{R^2}{3}\left(2\pi+\sqrt{3}\right)u^2$

B) $\frac{R^2}{3}\left(\pi+3\sqrt{3}\right)u^2$

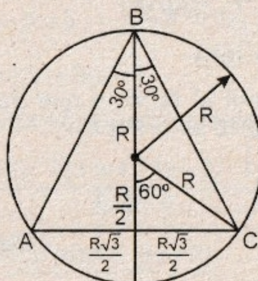
C) $\frac{R^2}{3}\left(4\pi+\sqrt{3}\right)u^2$

D) $\frac{R^2}{3}\left(4\pi+3\sqrt{3}\right)u^2$

E) $\frac{R^2}{4}\left(4\pi+3\sqrt{3}\right)u^2$

***Resolución:***

Debemos tener en cuenta que el área de un círculo de radio «r» viene dado por $\pi r^2$. Además el área de un triángulo equilátero de lado «L» viene dado por: $\frac{L^2\sqrt{3}}{2}$.




Ahora en el auxilio de la geometría ilustremos nuestro enunciado.

Área del primer círculo: $\pi R^2$

Área del primer triángulo:

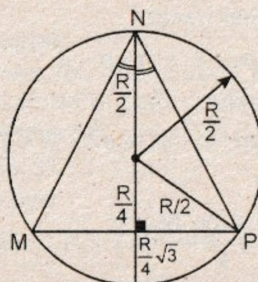
$$\frac{\left(R\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$

*Observación:*

$\frac{R}{2}$ es radio del círculo inscrito en el triángulo: ABC

Área del segundo círculo:

$$\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{4}$$





Área del segundo triángulo:

$$\frac{\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{16}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4^2}$$

*Observación:*

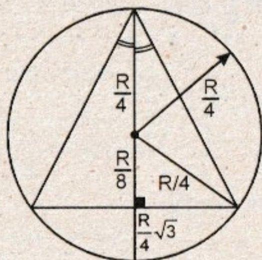
$\frac{R}{4}$ es radio del nuevo círculo inscrito en el triángulo MNP.

Área del tercer circulo:

$$\pi\left(\frac{R}{4}\right)^2=\frac{\pi R^2}{4^2}$$

Área del tercer triángulo:

$$\frac{\left(\frac{R}{4}\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{64}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4^3}$$




Sea: $S_1$ = suma límite de las áreas formadas de todos los circulos, es decir:

$$S_1=\pi R^2+\frac{\pi R^2}{4}+\frac{\pi R^2}{4^2}+\dots\dots$$

$$S_1=\pi R^2\left[1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\dots\dots\right]$$

Por suma límite:

$$S_1=\pi R^2\left[\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right]=\pi R^2\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$S_1=\frac{4\pi R^2}{3}\dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

También:

$S_2$ = suma límite de las áreas formadas de todos los triángulo; es decir:

$$S_2=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}+\frac{3\sqrt{3}R^2}{4^2}+\frac{3\sqrt{3}R^2}{4^3}+\dots\dots$$

$$S_2=3\sqrt{3}R^2\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\dots\dots\right]$$

Por suma límite:

$$S_2=3\sqrt{3}R^2\left[\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right]=3\sqrt{3}R^2\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$S_2=\sqrt{3}R^2\dots\dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

Finalmente se pide:

$$S_{lim}=S_1+S_2$$

De (1) y (2):

$$S_{lim}=\frac{4\pi R^2}{3}+\sqrt{3}R^2$$

$$\therefore\ S_{lim}=\frac{R^2}{3}\left(4\pi+3\sqrt{3}\right)\cup^2$$

**Clave: D**

**Problema 85**

Reducir:

$$2\cdot\sum_{k=1}^{20}(k+21)-\sum_{k=1}^{20}(k)+21$$

A) 1071 B) 1070 C) 1701
D) 1810 E) 1210

***Resolución:***

Designemos por T al valor reducido de la expresión dada:

$$T=2\cdot\sum_{k=1}^{20}(k+21)-\sum_{k=1}^{20}(k)+21$$

Dando uso de las propiedades y fórmulas procedemos así:

$$T=2\sum_{k=1}^{20}(k)+2\sum_{k=1}^{20}(21)-\sum_{k=1}^{20}(k)+21$$

$$T=\sum_{k=1}^{20}(k)+2\sum_{k=1}^{20}(21)+21$$

$$T=\frac{20\cdot 21}{2}+2(20\cdot 21)+21$$

$$T=210+840+21$$

$$T=1071$$

**Clave: A**

## Problema 86

Calcular el valor de:

$$\sum_{k=1}^{50}(2k)^2$$

A) 181200 B) 179300 C) 171700
D) 163800 E) 160400

***Resolución:***

Designemos por E a la suma pedida:

$$E=\sum_{k=1}^{50}(2k)^2$$

$$E=\sum_{k=1}^{50}\left(4k^2\right)$$

Luego dando uso de las propiedades tenemos:

$$E=4\sum_{k=1}^{50}\left(k^2\right)$$

$$E=\frac{4\cdot 50\cdot 51\cdot 101}{6}$$

$$\therefore\ 171700$$

**Clave: C**

## Problema 87

Mostrar el equivalente de:

$$\sum_{n=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{n}(6k)\right]$$

A) $n(n+1)$ B) $m(m-1)$

C) $\frac{m(m+1)}{2}$ D) $n^2-1$

E) $m(m+1)(m+2)$

***Resolución:***

Designemos por N a la expresión dada; luego teniendo en cuenta a las propiedades y fórmulas tenemos:

$$N=\sum_{n=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{n}(6k)\right]$$

$$N=\sum_{n=1}^{m}\left[6\sum_{k=1}^{n}(k)\right]$$

$$N=\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{6\cdot n(n+1)}{2}\right]$$

$$N=\sum_{n=1}^{m}\left[3n(n+1)\right]$$

$$N=3\sum_{n=1}^{m}\left(n^2+n\right)$$

$$N=3\left[\sum_{n=1}^{m}\left(n^2\right)+\sum_{n=1}^{m}(n)\right]$$

$$N=3\left[\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+\frac{m(m+1)}{2}\right]$$

$$N=3\left[\frac{m(m+1)(2m+1)+3m(m+1)}{6}\right]$$

$$\therefore\ N=m(m+1)(m+2)$$

**Clave: E**

**Problema 88**

Proporcional el equivalente de:

$$\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(k^2\right)}{\sum_{k=1}^{n}(k)\cdot\sum_{k=0}^{2n}(1/6)}\right]^2$$

A) 1/81 B) 1/9 C) 4
D) 2 E) 400

***Resolución:***

Sea E el equivalente de la expresión:

$$E=\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(k^2\right)}{\sum_{k=1}^{n}(k)\cdot\sum_{k=0}^{2n}(1/6)}\right]^2$$

$$E=\left[\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n(n+1)}{2}\cdot(2n+1)\frac{1}{6}}\right]^2$$

$$E=\left[\frac{2\cdot 6n(n+1)(2n+1)}{6n(n+1)(2n+1)}\right]^2$$

$$E=[2]^2$$

$$E=4$$

***Clave:*** **C**

**Problema 89**

Calcular la suma de los «n» términos de la siguiente sucesión:

$$\frac{1}{1\cdot 3};\frac{1}{2\cdot 4};\frac{1}{3\cdot 5};\frac{1}{4\cdot 6};\ldots\ldots\ldots\ldots$$

A) $\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$

B) $\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$

C) $\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$

D) $\frac{3}{4}-\frac{n}{n(n+1)}$

E) $\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$

***Resolución:***

Sea w la suma solicitada luego:

$$w=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n(n+2)}$$

$$w=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+2)}\right]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Observar que:

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$\frac{1}{k(k+2)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k}\right)$$

Luego en (1) se tendrá:

$$w=\sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k}\right)\right]$$

$$w=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k}\right)\right]$$

Con la finalidad de utilizar la propiedad telescópica transformamos convenientemente la expresión encerrada por el paréntesis:

$$w=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right)+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)\right]$$

$$w=-\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)\right]$$

Ahora aplicando la propiedad telescópica conseguimos:

$$w=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}-1\right)$$

$$w=-\frac{1}{2}\left[\frac{2n+3}{(n+2)(n+1)}-\frac{3}{2}\right]$$

$$\therefore\quad w=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$$

***Clave:* E**

**Problema 90**

Encontrar en términos de «n» el equivalente de la siguiente adición:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(k\,2^{k-1}\right)$$

A) $1+n\cdot 2^n$ B) $1-n\cdot 2^n$

C) $1+(n-1)2^n$ D) $1-(n-1)2^n$

E) $1-(n+1)2^n$

***Resolución:***

Hagamos:

$F(k)=k(2^k)\rightarrow F(o)=o \quad \wedge$

$$F(k-1)=(k-1)2^{k-1}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

De acuerdo con la propiedad telescópica podemos plantear la siguiente relación:

$$F(n)-F(o)=\sum_{k=1}^{n}\left[F(k)-F(k-1)\right]\ldots\ldots\ldots(2)$$

Reemplazando (1) en (2) tenemos:

$$n\cdot 2^n=\sum_{k=1}^{n}\left[k\cdot 2^k-(k-1)\cdot 2^{k-1}\right]\ldots\ldots\ldots(3)$$

Observa que:

$$k\cdot 2^k=2\cdot\frac{k\cdot 2^k}{2}$$

$$k\cdot 2^k=2k\cdot 2^{k-1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Reemplazando (4) en (3) conseguimos:

$$n\cdot 2^n=\sum_{k=1}^{n}\left[2k\cdot 2^{k-1}-k\,2^{k-1}+2^{k-1}\right]$$

$$n\cdot 2^n=\sum_{k=1}^{n}\left(k\cdot 2^{k-1}+2^{k-1}\right)$$

$$n\cdot 2^n=\sum_{k=1}^{n}\left(k\cdot 2^{k-1}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(2^{k-1}\right)$$

Recuerda que:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(C^{k-1}\right)=\frac{C^n-1}{C-1}$$

$$n\cdot 2^n=\sum_{k=1}^{n}\left(k\cdot 2^{k-1}\right)+\frac{2^n-1}{2-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(k\cdot 2^{k-1}\right)=n\cdot 2^n-2^n+1$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}\left(k\cdot 2^{k-1}\right)=1+(n-1)\cdot 2^n$$

***Clave:* C**

**Problema 91**

Calcular el equivalente de «a + b» si se cumple:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right]=a+b\left[(n+1)^{-1}-(n+2)^{-1}\right]$$

A) −0,25 B) 0,25 C) 0,75

D) −0,75 E) −1,125



***Resolución:***

Designemos por w al primer miembro de la igualdad mostrada, es decir:

$$w=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right]$$

$$w=\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{1}{k+1}\right)\left(\frac{1}{k(k+2)}\right)\right\}\text{..........(1)}$$

Tener en cuenta que:

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

Ahora en (1) se tendrá:

$$w=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}\right)\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right]\right\}$$

$$w=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k+1)k}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)\right\}$$

Dando uso de propiedades tenemos:

$$w=\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k+1)k}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)\right\}$$

Transponiendo cada término general de la sumatorias mostradas tenemos:

$$w=\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)\right\}$$

Aplicando la propiedad telescópica conseguimos:

$$w=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-1\right)\right\}$$

$$w=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right\}$$

$$w=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$w=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left[(n+1)^{-1}-(n+2)^{-1}\right]\text{.........(2)}$$

Por condición:

$$w=a+b\left[(n+1)^{-1}-(n+2)^{-1}\right]\text{.........(3)}$$

Em consecuencia comparando (2) y (3) obtenemos:

$$a=\frac{1}{4}\ \wedge\ b=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ a+b=-0{,}25$$

***Clave:*** **A**

## Problema 92

Para que valor de «n» se cumple:

$$1\lfloor\underline{1}+2\lfloor\underline{2}+3\lfloor\underline{3}+4\lfloor\underline{4}+.....+n\lfloor\underline{n}=\lfloor\underline{2000}-1$$

A) 1998 B) 2000 C) 2001
D) 1999 E) 2002

***Resolución:***

Designamos por w al primer miembro, luego este se puede expresar así:

$$w=\sum_{n=1}^{n}(k\lfloor\underline{k})\text{........(1)}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\lfloor\underline{k+1}-\lfloor\underline{k}=k\lfloor\underline{k}$$

La relación (1) se transforma en:

$$w=\sum_{n=1}^{n}(\lfloor\underline{k+1}-\lfloor\underline{k})$$

Luego según la propiedad telescópica conseguimos:

$$w=\lfloor\underline{n+1}-\lfloor\underline{1}$$

Por condición:

$$w=\lfloor\underline{2000}-1$$

Es decir debe cumplirse que:

$$\lfloor\underline{n+1}-\lfloor\underline{1}=\lfloor\underline{2000}-1$$

$$\lfloor\underline{n+1}=\lfloor\underline{2000}$$

n + 1 = 2000

$$\therefore\ n=1999$$

***Clave:*** **D**

## Problema 93

Hallar la suma de los cinco primeros términos de la sucesión $\{S_n\}$ siendo:

$$S_n = \sqrt{n+1} = \sqrt{n}$$

A) $1-\sqrt{6}$  B) $\sqrt{6}-1$  C) $\sqrt{6}$

D) $2-\sqrt{6}$  E) $2+\sqrt{6}$

***Resolución:***

Debemos tener en cuenta que:

$$\{S_n\}_{n\geq 1} = S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, \ldots\ldots$$

Como: $S_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Tenemos:

$$S_1 = \sqrt{1+1} - \sqrt{1}$$

$$S_1 = \sqrt{2} - 1$$

$$S_2 = \sqrt{2+1} - \sqrt{2}$$

$$S_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$S_3 = \sqrt{3+1} - \sqrt{3}$$

$$S_3 = 2 - \sqrt{3}$$

$$S_4 = \sqrt{4+1} - \sqrt{4}$$

$$S_4 = \sqrt{5} - 2$$

$$S_5 = \sqrt{5+1} - \sqrt{5}$$

$$S_5 = \sqrt{6} - \sqrt{5}$$

Se pide calcular:

$\sum_{k=1}^{5}(S_k)$ es decir:

$$\sum_{k=1}^{5}(S_k) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$$

$$\sum_{k=1}^{5}(S_k) = \left(\sqrt{2}-1\right) + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \left(2-\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{5}-2\right) + \left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{5}(S_k) = \sqrt{6} - 1$$

*Clave:* **B**

## Problema 94

Consideremos la sucesión $\{a_n\}$ definida por $a_n = \binom{-2}{n}\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$ luego el término de lugar 10 es:

A) 11  B) 12  C) 10

D) $-11$  E) $-12$

***Resolución:***

De acuerdo con el enunciado:

$\{a_n\}_{n\geq 1} = a_1, a_2, \ldots a_{10}, \ldots$ término pedido

Como: $a_n = \binom{-2}{n}$

Ahora tenemos:

$$a_{10} = \binom{-2}{10} =$$

$$\frac{(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)(-7)(-8)(-9)(-10)(-11)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}$$

Simplificando:

$$a_{10} = \frac{11}{1}$$

$$\therefore\quad a_{10} = 1$$

*Clave:* **A**



**Problema 95**

Sea la sucesión

$$a_1 = 0;\ a_2 = 1;\ a_3 = \frac{1}{2};\ a_4 = \frac{3}{4}$$

$$a_5 = \frac{5}{8};\ a_6 = \frac{11}{16};\ a_7 = \frac{21}{32};\ a_8 = \frac{43}{64}$$

Entonces la sucesión $\{a_n\}$ converge a:

A) $\frac{7}{12}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{2}{3}$
D) 1 E) $\infty$

***Resolución:***

La sucesión dada se puede reescribir por recurrencia:

$$a_1 = 0; a_2 = 1 \wedge a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2};\ n \in \mathbb{Z}^+$$

De la fórmula recurrente tenemos:

$$a_{k+2} = \frac{a_{k+1} + a_k}{2}$$

$$2a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$$

$$2a_{k+2} = 2a_{k+1} + a_k - a_{k+1}$$

$$2a_{k+2} - 2a_{k+1} = a_k - a_{k+1}$$

$$2(a_{k+2} - a_{k+1}) = a_k - a_{k+1}$$

Según sumatoria se plantea:

$$\sum_{k=1}^{n} 2(a_{k+2} - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1})$$

$$2\sum_{k=1}^{n} (a_{k+2} - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1})$$

Según regla telescópica

$$2(a_{n+2} - a_2) = a_1 - a_{n+1}$$

$$2a_{n+2} + a_{n+1} = a_1 + 2a_2 \text{ ................(1)}$$

En el proceso del límite $(n \to \infty)$ se cumple que:

$$L = \lim_{n\to\infty}(a_{n+2}) = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) \text{ .........(2)}$$

Reemplazando (2) en (1) tenemos:

$$2L + L = 0 + 2(1)$$

$$3L = 2$$

$$L = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ La sucesión dada converge a $\frac{2}{3}$

***Clave: C***

**Problema 96**

Marca verdadero (V) o falso (F)

I. La sucesión $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}_{n\geq 1}$ es acotada inferiormente.

II. La sucesión $\{n^2\}_{n\geq 1}$ es acotada inferiormente

III. La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ es acotada superiormente.

A) VFF B) VFV C) VVV
D) FVV E) FFF

***Resolución:***

De acuerdo con lo expuesto en la teoria procedemos a analizar cada sucesión dada del modo siguiente.

I. Sea la sucesión:

$$\{S_n\}_{n\geq 1} / S_n = \frac{n}{2n+1}$$

$$\{S_n\}_{n\geq 1} : \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{3}{7}; \text{..........} \frac{n}{2n+1} \text{......}$$

Observar que los términos de la sucesión van aumentando a razón de que «n» aumenta; luego es valido plantear

$S_n \geq \frac{1}{3}$; siendo $\frac{1}{3}$ su cota inferior.

$\therefore \{S_n\}_{n\geq 1}$ es acotada inferiormente

II. Sea la sucesión:

$$\{S_n\}_{n\geq 1} / S_n = n^2$$

$$\{S_n\}_{n\geq 1} : 1 ; 4 ; 9; ...... ; n^2; ......$$

De igual modo que en el caso anterior:

$S_n \geq 1$

$\therefore$ $\{S_n\}_{n\geq 1}$ es acotada inferiormente

III. Sea la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1} / S_n = \frac{1}{n}$

$$\{S_n\}_{n\geq 1} : 1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ...... ; \frac{1}{n} ; ........$$

Observar que los términos de la sucesión van disminuyendo a razón que «n» aumenta; luego planteamos.

$S_n \leq 1$; siendo 1 su cota superior

$\therefore$ $\{S_n\}_{n\geq 1}$ es acotada superiormente

Finalmente la sentencia es:

I) V II) V III) V

*Clave:* **C**

**Problema 97**

Calcular la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{arc Tan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$

D) $\pi$ E) $2\pi$

***Resolución:***

Teniendo en cuenta la siguiente relación:

$$\text{arc Tan}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) = \text{arc Tan}(x) - \text{arc Tan}(y)$$

Nótese que:

$$\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)+1} = \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{1+\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

Si $S_n$ es la suma pedida, ahora se tiene:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \text{arc Tan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \text{arc Tan}\left[\frac{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}}{1+\left(\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{k+1}\right)}\right]$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\text{arc Tan}\left(\frac{1}{k}\right) - \text{arc Tan}\left(\frac{1}{k+1}\right)\right]$$

Según propiedad telescópica

$$S_n = \text{arc Tan}(1) - \text{arc Tan}\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

Cuando $n \to \infty$ tenemos:

$$S = \text{arc Tan}(1) - 0$$

$$S = \text{arc Tan}(1)$$

$$\therefore \ S = \frac{\pi}{4}$$

**Problema 98**

Considerando que: $-1 < r < 1$ halle el equivalente de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + .... + ar^{n-1} + .....$$

A) $\frac{1}{1-r}$ B) $\frac{a}{a-r}$ C) $\frac{ar}{1-r}$

D) $\frac{a}{1-r}$ E) $\frac{a}{a+r}$



***Resolución:***

Sea: $S_n$ la suma de los «n» primeros términos de la serie es decir:

$$S_n = a + ar + ar^2 + .......... + ar^{n-1}$$

$$S_n = a(\underbrace{1 + r + r^2 + ............ + r^{n-1}}_{\text{Por cociente notable}})$$

$$S_n = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1-r}$$

$$S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

Luego en el límite:

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r}\right) - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{ar^n}{1-r}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = \frac{a}{1-r} - \frac{0}{1-r} = \lim_{n\to\infty}\left(S_n\right) = \frac{a}{1-r} - 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = \frac{a}{1-r}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

***Clave: D***

**Problema 99**

La serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(0{,}1)^{n-1} \text{ converge a:}$$

A) 10/9 B) 1/9 C) 1/27
D) 1/2 E) 1/25

***Resolución:***

Teniendo en cuenta la resolución del problema anterior podemos notar que: $r = 0{,}1 \rightarrow -1 < r < 1$, luego es valido plantear.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(0{,}1)^{n-1} = \frac{1}{1-0{,}1} = \frac{1}{9/10}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(0{,}1)^{n-1} = \frac{10}{9}$$

***Clave: A***

**Problema 100**

Determinar la convergencia o divergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{Ln(n)}\right]$$

***Resolución:***

Teniendo en cuenta al logaritmo natural y al índice inferior de la sumatoria; podemos establecer que:

$$n < e^n \ : \ \forall\, n \in \mathbb{N}^* /\ n \geq 2$$

Tomando «Ln» tenemos:

$$Ln(n) < Ln\, e^n$$

$$Ln(n) < n$$

De donde:

$$\frac{1}{Ln(n)} > \frac{1}{n}$$

Como: $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ es divergente

De acuerdo con lo expuesto en la teoria concluimos que:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{Ln(n)}\right] \text{ es divergente}$$

**Problema 101**

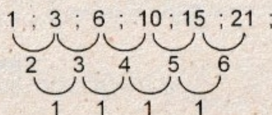
Halle el término enésimo para la sucesión:
1; 3; 6; 10; 15; 21; ...

A) n B) n + 1 C) n – 1

D) $\frac{n(n+1)}{2}$ E) $\frac{n(n-1)}{2}$

***Resolución:***

La sucesión es:




Según la teoría:

$$a_n = 1C_0^{n-1} + 2C_1^{n-1} + 1C_2^{n-1}$$

$$a_n = 1 + 2(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$a_n = 2n - 1 + \frac{n^2 - 3n + 2}{2}$$

$$a_n = \frac{4n - 2 + n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

***Clave:*** **D**

**Problema 102**

Indque el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x +^2 + ... + a_px^n$
$a_p \neq 0$ es una función polinomial, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} a_pn^p$.

II. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3n+2} - n = \frac{3}{4}$

III. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = M \to \exists I = [a;b] /$
$x(n) \subset I \ \forall n \in \mathbb{N}$

A) VVF B) FVV C) FVF
D) FFV E) VFV

***Resolución:***

En cada proposición:

I. Falso (F)
Según término dominante lo correcto es:

$$\text{Lím}_{n\to\infty} f(x) = \text{Lím}_{n\to\infty} a_px^n$$

II. Falso (F):
Suponiendo que:

$$L = \text{Lím}_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+2} - n\right)$$

$$L = \text{Lím}_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{\sqrt{n^2+3n+2}+n}\right)$$

$$L = \text{Lím}_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{n+n}\right)$$

$$L = \text{Lím}_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

III. Verdadero (V)
En efecto si $\text{Lím}_{n\to\infty}(x_n) = M \in \mathbb{R}$
Entonces

$$\exists I = [a;b] / \{x_n\} \subset I, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$\therefore$ Combinación correcta = FFV

***Clave:*** **D**

**Problema 103**

Si $\{a_n\}$ es una sucesión tal que:

$$a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{n+5}; n \text{ par} \\ \frac{n^2+5}{n^3+2n}; n \text{ impar} \end{cases}$$



Entonces cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

A) La sucesión es convergente
B) La sucesión es monótona
C) La sucesión es creciente
D) La sucesión es decreciente
E) La sucesión tiene dos puntos límites.

***Resolución:***
La sucesión es:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n+1}{n+5} & ; \text{n par} \\ \dfrac{n^2+5}{n^3+2n} & ; \text{n impar} \end{cases}$$

Si n es par $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = 1$

Si n es impar $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = 0$

$\therefore \{a_n\}$ tiene dos puntos límites

***Clave:*** **E**

## Problema 104

Determine el valor de convergencia de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$; donde :

$$a_n = \left(\frac{n+3}{n}\right)^{\frac{n^2}{n+3}}$$

A) e B) $e^2$ C) $e^3$
D) 2e E) 3e

***Resolución:***
Se plantea:

$$L = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^{\frac{n^2}{n+3}}$$

Por propiedad:

$$L = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}-1\right)\frac{n^2}{n+3}}$$

$$L = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2}{n^2+3n}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(3)}$$

$$\therefore L = e^3$$

***Clave:*** **C**

## Problema 105

Si $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión, halle el valor de $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ si: $S_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ ; $0 < a < b$.

A) 1 B) 2 C) a
D) ab E) b

***Resolución:***
La sucesión es:

$$\{S_n\}$$

Se pide calcular: $L = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n)$, donde:

$$S_n = \sqrt[n]{a^n + b^n} \; ; 0 < a < b$$

$$S_n = \sqrt[n]{b^n\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1\right]}$$

$$S_n = b\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = b.\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1}$$

Por condición tenemos:

$$0 < a < b$$

$$0 < a^n < b^n$$

$$b^n < a^n + b^n < 2b^n$$

Al dividir por $b^n$:

$$1 < \left(\frac{a}{b}\right)^n + 1 < 2$$

$$1 < \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1} < 2^{\frac{1}{n}}$$

Cuando $n \to \infty$ tenemos:

$$1 < \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1} < 1$$

Según el teorema del encaje:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1} = 1$$

Finalmente tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} (S_n) = b.(1)$$

$$\therefore \quad L = b$$

***Clave:* E**

## Problema 106

Determine el término de lugar 12 en la sucesión $\{a_n\}: 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, \ldots$ como respuesta de la suma de sus digitos.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

***Resolución:***

La sucesión es:

1 ; 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 13 ; 24 ; 44 ; ...........

Que podemos reescribir así:

$a_1 = 1$; $a_2 = 1$; $a_3 = 2$; y cuando $n \geq 1$:

$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$

Ahora tenemos:

$a_9 = a_8 + a_7 + a_6 = 81$

$a_{10} = a_9 + a_8 + a_7 = 118$

$a_{11} = a_{10} + a_9 + a_8 = 243$

$a_{12} = a_{11} + a_{10} + a_9 = 442$

$$\therefore \sum \text{ de digitos de } a_{12} = 10$$

***Clave:* E**

## Problema 107

Dada la solución $\left\{1; \frac{4}{5}; \frac{5}{7}; \frac{2}{3}; \frac{7}{11}; \ldots\right\}$.

¿A partir de qué lugar los términos de la sucesión son menores que $\frac{2}{3}$?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

***Resolución:***

Se tiene:

$$1; \frac{4}{5}; \frac{5}{7}; \frac{2}{3}; \frac{7}{11}; \ldots$$

Que se puede reescribir así:

$$\frac{3}{3}; \frac{4}{5}; \frac{5}{7}; \frac{6}{9}; \frac{7}{11}; \ldots.$$

De donde reconocemos que:

$$a_n = \frac{n+2}{2n+1}$$

Por condición tenemos:

$$\frac{n+2}{2n+1} < \frac{2}{3}$$

$$3n + 6 < 4n + 2$$

$$n > 4$$

$\therefore$ La condición se cumple a partir del cinco

***Clave:* B**

## Problema 108

Determine el valor de convergencia de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si $a_1 = 0$ y $a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n + 6}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

***Resolución:***

Se tiene:

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n + 6}$$

$$\text{Lím}(a_{n+1}) = \sqrt[3]{\text{Lím}(a_n) + 6} \ldots..(*)$$



Según la teoría tenemos que:

$$\text{Lím}(a_{n+1}) = \text{Lím}(a_n) = L$$

Ahora en $(*)$ tenemos:

$$L = \sqrt[3]{L+6}$$

$$L^3 + L + 6$$

$$\therefore \quad L = 2$$

***Clave:*** **B**

## Problema 109

Determine el valor de convergencia de la sucesión $\left\{\left(\dfrac{\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{9}}{2}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

***Resolución:***

Se plantea:

$$L = \underset{n\to\infty}{\text{Lím}}\left(\frac{\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{9}}{2}\right)^n$$

$$L = e^{\underset{n\to\infty}{\text{Lím}}\left(\frac{\sqrt[n]{4}+\sqrt[4]{9}-2}{2}\right)n}$$

Reescribiendo en forma conveniente:

$$L = e^{\underset{n\to\infty}{\text{Lím}}\left[\frac{4^{\frac{1}{n}}+9^{\frac{1}{n}}-2}{2\left(\frac{1}{n}\right)}\right]}$$

Sea $\dfrac{1}{n} = x$, luego si n tiende al infinito x tiende a cero:

$$L = e^{\underset{x\to 0}{\text{Lím}}\left(\frac{4^x+9^x-2}{2x}\right)}$$

Según la regla de Hospitall – Bernoulli:

$$L = e^{\underset{x\to 0}{\text{Lím}}\left[\frac{4^x\text{Ln}(4)+9^x\text{Ln}(9)}{2}\right]}$$

$$L = e^{\frac{\text{Ln}(4)+\text{Ln}(9)}{2}} = e^{\frac{\text{Ln}(36)}{2}}$$

$$L = e^{\text{Ln}(36)^{\frac{1}{2}}} = e^{\text{Ln}(6)}$$

$$\therefore \quad L = 6$$

***Clave:*** **E**

## Problema 110

Si la sucesión:

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{n^3+1}{n+2} + an^2 + bn + c\right\}$$

es convergente al valor cero, halle la relación correcta entre los valores de a; b y c.

A) $a + b < c$ B) $b + c = a$
C) $a + b + c < 0$ D) $a + b + c > 0$
E) $a + b = 4c$

***Resolución:***

Por condición:

$$\underset{n\to\infty}{\text{Lím}}(a_n) = 0$$

Donde:

$$a_n = \frac{n^3+1}{n+2} + an^2 + bn + c$$

$$a_n = \frac{(a+1)n^3 + (2a+b)n^2 + (2b+c)n + 2c + 1}{n+2}$$

Según la condición se debe cumplir que:

$$a+1=0 \wedge 2a+b=0 \wedge 2b+c=0$$

$$a=-1 \wedge b=2 \wedge c=-4$$

$$\therefore \quad a+b+c<0$$

***Clave:*** **C**

## Problema 111

Calcule el valor de convergencia de la sucesión:

$$\{a_n\} = \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^5; \left(\frac{3}{5}\right)^7; \left(\frac{5}{7}\right)^9; \left(\frac{7}{9}\right)^{11}; \ldots\right\}$$

A) $e^{-4}$  B) $e^{-3}$  C) $e^{-2}$

D) $\frac{1}{2}e^{-1}$  E) 1

***Resolución:***

Según la información que proporciona el problema reconocemos que:

$$a_n=\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{2n+3}$$

Ahora tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}-1\right)(2n+3)}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-4n-6}{2n+1}\right)}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(a_n)=e^{-2}$$

***Clave: C***

## Problema 112

Determine el valor de:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{3}{9k^2+3k-2}-\frac{1}{3n+2}\right]$$

A) $\frac{n}{3n+2}$ B) $\frac{5n}{3n+2}$ C) $\frac{n}{6n+4}$

D) $\frac{5n}{6n+4}$ E) $\frac{3n}{6n+4}$

***Resolución:***

Se tiene:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{9k^2+3k-2}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{3}{(3k-1)(3k+2)}-\frac{1}{3n+2}\right]$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{3}{(3k-1)(3k+2)}\right]-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3n+2}\right)$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3n+2}\right)$$

Según la propiedad telescópica:

$$S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}-\frac{n}{3n+2}$$

$$S_n=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{3n+2}$$

$$\therefore\ S_n=\frac{n}{6n+4}$$

***Clave: C***

## Problema 113

Determine el valor de la siguiente suma:

$$\sum_{j=0}^{19}2^{j+1}-\sum_{k=-3}^{16}16.2^{k}+\sum_{\ell=3}^{10}2^{3-\ell}$$

A) $\frac{65}{32}$  B) $\frac{127}{64}$  C) $\frac{255}{128}$

D) $\frac{511}{256}$  E) $\frac{1023}{512}$

***Resolución:***

Se tiene:

$$S=\sum_{j=0}^{19}2^{j+1}-\sum_{k=-3}^{16}2^{k+4}+\sum_{\ell=3}^{10}2^{3-\ell}$$

$$S=2\left(2^{20}-1\right)-2\left(2^{20}-1\right)+\frac{2^8-1}{2^7}$$

$$S=0+\frac{256-1}{128}$$

$$\therefore\ S=\frac{255}{128}$$

***Clave: C***

## Problema 114

Determine la suma:

$$1(2)^2+2(3)^2+3(4)^2+4(5)^2+\dots+$$

$$n(n+1)^2\ ;\ n\in\mathbb{N}\cdot$$

A) $\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)(3n+1)$

B) $\frac{1}{4}n(3n+1)(n+2)(3n+5)$

C) $\frac{1}{6}n(2n+1)(n+2)(3n+5)$

D) $\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$

E) $\frac{1}{18}n(n+1)(n+2)(3n+5)$

***Resolución:***

Se tiene:

$$S=1(2)^2+2(3)^2+3(4)^2+\dots..+n(n+1)^2$$

$$S=\sum_{k=1}^{n}\left[k(k+1)^2\right]=\sum_{k=1}^{n}(k^3+2k^2+k)$$

$$S=\sum_{k=1}^{n}(k^3)+2\sum_{k=1}^{n}(k^2)+\sum_{k=1}^{n}(k)$$

$$S=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+2\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$S=\frac{n(n+1)}{12}[3n(n+1)+4(2n+1)+6]$$

$$S=\frac{n(n+1)}{12}(3n^2+11n+10)$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{12}(n)(n+1)(n+2)(3n+5)$$

***Clave:*** **D**

## Problema 115

Si: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$. Halle el valor de la suma.

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{24}$ C) $\frac{10}{31}$

D) $\frac{23}{90}$ E) $\frac{5}{9}$

***Resolución:***

Se tiene:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}\right]$$

$$6S=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{6}{(2n-1)(2n+5)}\right]$$

$$6S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+5}\right)$$

$$6S=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)+\left(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)\right]$$

Según la propiedad telescópica:

$$6S=(1-0)+\left(\frac{1}{3}-0\right)+\left(\frac{1}{5}-0\right)$$

$$6S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$$

$$6S=\frac{23}{15}$$

$$\therefore\ S=\frac{23}{90}$$

***Clave:*** **D**

E&M



**Problema 116**

Dada la siguiente sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde

$S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}\right)$, indique el valor de convergencia, si es que existe.

A) No existe
B) Converge a 1
C) Converge a 2
D) Converge a 3
E) Converge a 4

***Resolución:***
Se tiene:

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{n}$$

Cuando $n \to \infty$:

$$S = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.......$$

Es la serie armonica, la cual es divergente.

***Clave: A***

**Problema 117**
Calcule la siguiente suma:

$$\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+...$$

A) 2 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$

D) 0 E) $\frac{4}{5}$

***Resolución:***
Se tiene:

$$S = \frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+....$$

$$S = \sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{1}{k(k+1)}\right] = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

Según la propiedad telescópica:

$$S = \frac{1}{2}-0$$

$$\therefore\ S = \frac{1}{2}$$

***Clave: C***

**Problema 118**
Calcular:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2+4n+3}\right)$$

A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{8}{11}$ E) $\frac{4}{5}$

***Resolución:***
Se tiene:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+4n+3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)(n+3)}\right]$$

$$2S = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(n+1)(n+3)}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$2S = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\right]$$

Según la propiedad telescópica:

$$2S = \frac{1}{2}-0+\frac{1}{3}-0$$

$$2S = \frac{5}{6}$$

$$\therefore\ S = \frac{5}{12}$$

***Clave: A***



Problema 119

Determine el valor de la suma

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k^3}(2)^{-k}$$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{3}$

D) 1 E) 2

***Resolución:***

Se tiene:

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k^3}(2)^{-k}$$

Fácilmente podemos reconocer que:

$$(-1)^{k^3}=(-1)^k\ ;\ \forall\ k\in\mathbb{N}$$

Ahora tenemos:

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(2)^{-k}$$

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}$$

Según propiedad:

$$S=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore\ S=\frac{2}{3}$$

***Clave:*** C

Problema 120

Indique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+3}{n^3}\right)$ es convergente

II. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(3^{-n}+4^{-n}\right)$ es divergente

III. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3^n}\right)=2$

A) VVV B) VFV C) FVV

D) FFV E) FVF

***Resolución:***

Para cada afirmación tenemos:

I. Verdadero (V)

La serie es $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+3}{n^3}\right)$.

Consideremos la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Según el criterio de comparación por paso al límite se plantea:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{\sqrt{n}+3}{n^3}}{\frac{1}{n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+3}{n}\right)=0$$

Con lo cuál se afirma que la serie dada es convergente.

II. Falso (F)

La serie dada es:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(3^{-n}+4^{-n})=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}$$

$$S=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}\in\mathbb{R}$$

Con lo cual se afirma que la serie dada es convergente.

III. Verdadero (V)
Se plantea que:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3^n}\right)=4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=4\left(\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right)$$

$$S=4\left(\frac{1}{2}\right)=2$$

$\therefore$ Combinación correcta = VFV

***Clave:* B**

## Problema 121

Calcule la suma:

$$S=\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{2}{7^4}+\frac{1}{7^5}+\frac{2}{7^6}+\ldots$$

A) $\frac{3}{15}$ B) $\frac{3}{17}$ C) $\frac{3}{14}$

D) $\frac{3}{16}$ E) $\frac{3}{20}$

***Resolución:***

Se tiene:

$$S=\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{2}{7^4}+\frac{1}{7^5}+\frac{2}{7^6}+\ldots$$

$$S=\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{7^5}+\ldots\right)+\left(\frac{2}{7^2}+\frac{2}{7^4}+\frac{2}{7^6}+\ldots\right)$$

Según propiedad:

$$S=\frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{49}}+\frac{\frac{2}{49}}{1-\frac{1}{49}}$$

$$S=\frac{7}{48}+\frac{2}{48}=\frac{9}{48}$$

$$\therefore\ S=\frac{3}{16}$$

***Clave:* D**

## Problema 122

Determine el valor de convergencia de la serie

$$E=\frac{1}{5}+\frac{2}{25}+\frac{3}{125}+\frac{4}{625}+\ldots\infty$$

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{3}{16}$

D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{5}{16}$

***Resolución:***

Se tiene:

$$E=\frac{1}{5}+\frac{2}{25}+\frac{3}{125}+\frac{4}{625}+\ldots$$

$$E=\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{1}{5}\right)^k$$

Según propiedad:

$$E=\frac{\frac{1}{5}}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{16}{25}}=\frac{25}{5.16}$$

$$\therefore\ E=\frac{5}{16}$$

***Clave:* E**

## Problema 123

Si se cumple que:

$$\sum_{k=1}^{n}(15+8k+k^2)^{-1}=\frac{a}{b}+\frac{c}{n+4}+\frac{d}{n+5}$$

Determine el valor de:

$$E=a+b+c-d+40e$$

donde:

$$e=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+8n+15}\right)$$

Sabiendo además que a y b son primos entre sí y $c,d \in \mathbb{Q}$.

A) 47 B) 51 C) 53
D) 58 E) 62

***Resolución:***
Supongamos que:

$$S=\sum_{k=1}^{n}\left(15+8k+k^2\right)^{-1}$$

$$S=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2+8k+15}\right)$$

$$S=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(k+5)(k+3)}\right]$$

$$2S=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2}{(k+5)(k+3)}\right]$$

$$2S=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+5}\right)....(*)$$

$$2S=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}\right)+\left(\frac{1}{k+4}-\frac{1}{k+5}\right)\right]$$

Según la propiedad telescópica:

$$2S=\frac{1}{4}-\frac{1}{n+4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{n+5}$$

$$2S=\frac{9}{20}-\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}$$

$$S=\frac{9}{40}-\frac{\frac{1}{2}}{n+4}-\frac{\frac{1}{2}}{n+5}$$

Por condición:

$$a=9\wedge b=40\wedge c=-\frac{1}{2}\wedge d=-\frac{1}{2}$$

Se pide calcular:

$$E=9+40-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+40\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+8n+15}\right)$$

$$E=49+40\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+5)(n+3)}\right]$$

$$E=49+40\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+5}\right)$$

$$E=49+20\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+5}\right)$$

Dando uso de la propiedad telescópica previa transformación según $(*)$, tenemos:

$$E=49+20\left(\frac{1}{4}-0+\frac{1}{5}-0\right)$$

$$E=49+5+4$$

$$\therefore\ E=58$$

***Clave: D***

**Problema 124**

¿A qué valor converge la serie $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$?

A) $e-1$ B) $xe-1$ C) $e^x-1$

D) $\frac{e^{2x}-1}{e-1}$ E) $\frac{e^x-1}{e-1}$

***Resolución:***
La serie dada es:

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right]$$

$$S=\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+....$$

Según serie de potencias:

$$S = e^x - \frac{x^0}{0!}$$

$$\therefore\ S = e^x - 1$$

**Clave: C**

## Problema 125

Sean *a, b, c* tres números enteros que forman una progresión aritmética de razón positiva (en ese orden). Si a disminuye en 5; b disminuye en 3 y *c* aumenta en 11, se convierte a una progresión geométrica, si *a+b+c = 36*, determine la razón de la progresión aritmética.

A) 4 B) 6 C) 12
D) 16 E) 20

***Resolución:***

Según el enunciado tenemos:

$$\div\, a \cdot b \cdot c$$

$$a = x - r \wedge b = x \wedge c = x + r$$

Por condición:

$$a + b + c = 36$$
$$3x = 36$$
$$x = 12$$

Con lo cual tenemos:

$$a = 12 - r \wedge b = 12 \wedge c = 12 + r$$

Nuevamente por condición:

$$\div\div\, a - 5 : b - 3 : c + 11$$
$$\div\div\, 7 - r : 9 : 23 + r$$

Según la razón:

$$\frac{9}{7-r} = \frac{23+r}{9}\ ;\ r > 0$$

$$81 = 161 - 16r - r^2\ ;\ r > 0$$

$$r^2 + 16r - 80 = 0\ ;\ r > 0$$
$$(r+20)(r-4) = 0\ ;\ r > 0$$

$$\therefore\ r = 4$$

**Clave: A**

## Problema 126

Sean los números positivos *a, b* y *c* que están en progresión geométrica, podemos afirmar que:

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right)$$ es igual que:

A) $a^3 + b^3 + c^3$ B) $\frac{a^3}{c} + \frac{b^3}{a} + \frac{c^3}{b}$

C) $\frac{a^3}{c} + \frac{b^3}{b} + \frac{c^3}{a}$ D) $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}$

E) $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} + \frac{c^3}{c}$

***Resolución:***

Según condición:

$$b = ak \wedge c = ak^2$$

Sea la expresión:

$$S = a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right)$$

$$S = a^6k^6\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^3k^3} + \frac{1}{a^3k^6}\right)$$

$$S = a^3k^6 + a^3k^3 + a^3$$

$$S = (ak^2)^3 + (ak)^3 + a^3$$

$$\therefore\ S = a^3 + b^3 + c^3$$

**Clave: A**

## Problema 127

Determine el valor de convergencia de la sucesión $\{x_n\}$, donde:

$$x_n = \left[\frac{Ln(an)}{Ln(bn)}\right]^{Ln(n)}\ ;\ a, b \in \mathbb{R}^+$$

A) $\frac{a}{b}$ B) $Ln\left(\frac{a}{b}\right)$ C) Ln (ab)

D) ab E) $Ln\left(\frac{b}{a}\right)$

***Resolución:***

De acuerdo con el enunciado se pide calcular :

$$L = \lim_{x\to\infty}(x_n)$$

Por condición tenemos:

$$x_n = \left[\frac{Ln(an)}{Ln(bn)}\right]^{Ln(n)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Cuando n = ∞ se observa la forma $\frac{\infty}{\infty}$ para la base, luego según L'Hôpitall:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{Ln(an)}{Ln(bn)}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{a}{an}}{\frac{b}{bn}}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{Ln(an)}{Ln(bn)}\right] = \lim_{n\to\infty}(1) = 1$$

Ahora nótese que en (1) cuando n = ∞ se obtiene la forma $1^{\infty}$.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{Ln(an)}{Ln(bn)}\right]^{Ln(n)}$$

Por propiedad tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{Ln(an)}{Ln(bn)}-1\right]\cdot Ln(n)}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{Ln(an)-Ln(bn)}{Ln(bn)}\right]\cdot Ln(n)}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{Ln\left(\frac{a}{b}\right)}{Ln(bn)}\right]\cdot Ln(n)}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = e^{Ln\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{Ln(n)}{Ln(bn)}\right]}$$

Según teoremas y L'Hôpitall:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}(1)} = \left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$$

$\therefore$ Valor de convergencia $= \frac{a}{b}$

***Clave:* A**

## Problema 128

Los números a, b + 15,150 – a forman una sucesión aritmética creciente y los números a, b, 150 – a forman una progresión geométrica.

Halle: a

A) 30 B) 40 C) 60
D) 100 E) 120

***Resolución:***

Con cada condición dada:

* De la progresión aritmética

$$\frac{a+150-a}{2} = b+15$$

$$b+15 = 75$$

$$b = 60$$

* De la progresión geométrica

$$(a)(150-a) = b^2$$

$$(a)(150-a) = 60.60$$

$$(a)(150-a) = 30.120$$

Aquí reconocemos que a = 30, pues de los dos valores que verifican la ecuación anterior sólo uno de ellos hace que la progresión aritmética sea creciente:

$$\therefore \quad a = 30$$

***Clave:* A**

# Problemas Propuestos

**01.** Si: $3+6+9+...+3n <> k[n(n+1)]$

¿Cuáles el valor de «k»?

A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3,5

**02.** Si:

$5+11+17+...+(6n-1)=an(bn+c)$

Calcular «a+b+c»

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

**03.** Calcular:

$$\sum_{k=2}^{10}(3)+\sum_{k=2}^{12}(2)$$

A) 41 B) 42 C) 43
D) 44 E) 45

**04.** Efectuar la siguiente adición:

$$\sum_{k=1}^{50}\left[\frac{1}{k(k+1)}\right]$$

A) $\frac{49}{50}$ B) $\frac{51}{50}$ C) $\frac{50}{51}$
D) $\frac{50}{49}$ E) $\frac{52}{51}$

**05.** Si:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\right]=\frac{an}{bn+1}$$

Calcular: a + b

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

**06.** Efectuar:

$$\sum_{k=1}^{10}\left[10^{k+1}-10^{k}\right]$$

A) $10^8-1$ B) $10^9-1$
C) $10^{10}-10$ D) $10^{11}-10$
E) $10^{11}-1$

**07.** Calcular «n» en $\sum_{k=0}^{n}(2^k)=255$

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

**08.** Al sumar los términos de la siguiente sucesión:

3 ; 10 ; 29 ; 66 ;..........; 1002

Se obtiene:

A) 3005 B) 3015 C) 3025
D) 3035 E) 3045

**09.** Calcular:

$$\sum_{k=1}^{20}\left[k(k+1)(k+2)\right]$$

A) 53130 B) 52990 C) 52540
D) 51950 E) 51340

**10.** Cuántos términos se seben tomar de la sucesión 2; 6; 10; .... de modo que la suma de todos ellos sea igual a: 12800.

A) 60 B) 70 C) 80
D) 90 E) 50

**11.** Proporcionar el valor de:

$$\sum_{n=2}^{4}\left(\sum_{k=0}^{n}k^2\right)$$

A) 19 B) 29 C) 39
D) 49 E) 59

**12.** Calcular «a – b» del sistema:

$$\sum_{k=-1}^{5}(ak+b)=7\text{.............}(1)$$

$$\sum_{k=1}^{5}(ak+b)=20\text{...........}(2)$$

A) 6 B) 8 C) 7
D) 5 E) 9

**13.** Calcular:

$$\sum_{k=1}^{41}\left(\sqrt[3]{3k-1}-\sqrt[3]{3k+2}\right)$$

A) $\sqrt[3]{2}+1$ B) $\sqrt[3]{2}+3$ C) $\sqrt[3]{2}-5$
D) $\sqrt[3]{2}+7$ E) $\sqrt[3]{41}$

**14.** Calcular:

$$\sum_{k=4}^{43}\left(\frac{1}{\sqrt{2k-5}+\sqrt{2k-7}}\right)$$

A) 8 B) 16 C) 4
D) 16 E) 2

**15.** Luego de efectuar la adición:

$$\sum_{k=1}^{n}F(k)$$

Donde: $F(k)=\dfrac{k+1}{2^k}$

Cuál es el límite de ésta al tender n al infinito.

A) $\infty$ B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

**16.** El equivalente de:

$$\frac{1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots\ldots+1995^2}{1997}$$

tiene:

A) 4 cifras B) 5 cifras C) 6 cifras
D) 7 cifras E) 8 cifras

**17.** El cuarto término de la sucesión:

$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n\geq 1}$ es:

A) 0,20 B) 0,40 C) 0,60
D) 0,80 E) 0,85

**18.** Hallar la suma de los cinco primeros términos de la sucesión:

$$\left\{(-1)^n\,2\right\}_{n\geq 1}$$

A) – 2 B) 0 C) 2
D) 4 E) – 4

**19.** Hallar el término de la sucesión:

$$\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{6};\frac{1}{8}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

A) $\dfrac{1}{n}$ B) $\dfrac{1}{n^2}$ C) $\dfrac{1}{n+2}$

D) $\dfrac{1}{2n}$ E) $\dfrac{1}{4n-2}$

**20.** El producto de los seis primeros términos de la sucesión:

$\left\{\dfrac{n+2}{n+3}\right\}_{n\geq 1}$ es:

A) 0,3 B) 0,6 C) $0,\hat{3}$

D) $0,\hat{6}$ E) 0,4

**21.** Hallar el n–ésimo término de la sucesión:

0 , 3 , 8 , 15 , 24 , 35 .............

A) $n^2+1$ B) 2n–1 C) $n^2-3$
D) $n^2-1$ E) 2n+1

**22.** Dadas las sucesiones:

$\{a_n\} = (1;1),(2;3),(3;5),......(n;2n-1)$

$\{b_n\} = (1;1),(2;4),(3;9),......(n;n^2)$

Calcular la suma de las ordenadas de:

$$a_5+b_5 \vee b_3-a_3$$

A) 35 B) 36 C) 37
D) 38 E) 39

**23.** La(las) sucesión (sucesiones) acotada es (son):

I. $\left\{\frac{n}{n+3}\right\}_{n\geq 1}$ II. $\left\{2^n\right\}_{n\geq 1}$

III. $\left\{(-2)^n\right\}_{n\geq 1}$

A) I B) II C) $I \wedge II$
D) III E) $I \wedge III$

**24.** Marcar (V) o (F) según corresponda:

I) Una sucesión esta acotada cuando lo está superior e inferiormente ................( )

II) La sucesión es creciente si cada término es mayor que el anterior ................( )

III) Una sucesión es decreciente si cada término es menor que el anterior ................( )

A) VFF B) FFF C) VVV
D) VVF E) FVV

**25.** Dada la siguiente sucesión de término general.

$a_n = \frac{2n^2+n+3}{n+1}$, hallar «p» si: $a_p = \frac{108}{8}$

A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 11

**26.** La sucesión que no esta acotada es:

A) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ B) $\left\{\frac{1-n}{2n}\right\}_{n\geq 1}$

C) $\left\{\frac{n+1}{2n}\right\}_{n\geq 1}$ D) $\left\{\frac{1-n}{5n}\right\}_{n\geq 1}$

E) $\left\{-\left(\frac{3}{n}\right)^n\right\}_{n\geq 1}$

**27.** La sucesión: $\left\{\frac{2n^3+7}{5n^3}\right\}_{n\geq 1}$ converge a:

A) 2/5 B) 2 C) 5
D) 5/2 E) 7/5

**28.** La serie: $\sum_{n=1}^{\infty}(0,5)^n$ converge a:

A) 1/2 B) 1/4 C) 1/8
D) 1 E) 2

**29.** Con respecto a la serie:

1+5+9+13+...........lo correcto es:

A) Es decreciente
B) Es convergente
C) Es divergente
D) Es oscilante
E) Es alternante

**30.** Con respecto a la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^3+3}{2n^3+1}\right)\text{; se afirma:}$$

A) Converge a cero
B) Converge a 1/4
C) Converge a 1
D) Converge a 3
E) Es divergente

**31.** Marca (V) o (F) según corresponda:

I) Si una sucesión tiene límite, está acotada superior e inferiormente ................( )
II) Toda sucesión monótona y acotada es convergente ................( )
III) Toda sucesión decreciente y acotada inferiormente tiene límite que coincide con su extremo inferior ................( )

A) FVV B) FFF C) VFF
D) VVF E) VVV

**32.** ¿Qué términos de la sucesión

$$\left\{\frac{n^2+1}{4}\right\}_{n\geq 1}$$ son mayores que $10^6$?

A) A partir de: n = 1999
B) A partir de: n = 2000
C) A partir de: n = 2001
D) A partir de: n = 2002
E) A partir de: n = 2003

**33.** La serie:

$0,3+(0,3)^2+(0,3)^3+(0,3)^4+$ ................converge a:

A) 1/7 B) 2/7 C) 3/7
D) 4/7 E) 5/7

**34.** Marca (V) o (F)

I) Toda sucesión acotada es convergente ................( )

II) Si: $\{a_n\}$ es tal que:

$a_{n+1}=2a_n+1$ con $a_1=0$ entonces:

$a_3=3$ .............( )

III) Si: $\{a_n+b_n\}$ es convergente entonces $\{a_n\}$ es convergente .................( )

A) VVF B) FFF C) VFF
D) VVV E) FVF

**35.** Marcar (V) si es verdadero o (F) si es falso.

I) La sucesión: $\{(-1)^n\}_{n\geq 1}$ es acotada .................( )

II) La sucesión: $\left\{\frac{1}{n+3}\right\}_{n\geq 1}$ es convergente ................( )

III) La sucesión: $\{a_n\}$ tal que:

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n;\forall n\in\mathbb{N}^*$ con $a_1=-2$ es decreciente ............. ( )

A) VVV B) FFF C) FFV
D) VFF E) VVF

**36.** Consideremos la sucesión: $\{a_n\}$ donde:

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}[(k+1)(k+4)]^{-1}$$

Luego $\{a_n\}$ converge a:

A) 0 B) 13/36 C) 1/3
D) 1/36 E) 1/2

**37.** Marcar verdadero (V) o falso (F):

I) Si la serie tiene sólo término positivo entonces es convergente o divergente: ....................( )

II) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \wedge \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ entonces la suma será:

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ ...............( )

III) La serie: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$......... es convergente ....................( )

A) VVF B) VFF C) VFV
D) FVV E) FFF

**38.** Marcar verdadero (V) o falso (F):

I) En una serie se puede alterar el orden de los términos sin que altere ni su caracter ni su suma ....................( )

II) Si el límite del término general de una serie es cero, entonces la serie es convergente ........ ....................( )

III) En toda serie convergente el límite del término general es cero ............( )

A) FFV B) FVV C) VVV
D) VFF E) FFF

**39.** Marcar verdadero (V) o falso (F):

I) 1+2+3+4+5 ..........................
Es divergente ...................( )

II) 1–2+3–4+5–6+......................
Es convergente..................( )

III) 4–4+4–4+4........................( )

A) VFV B) VFF C) FVV
D) VVF E) FFF

**40.** La expresión:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)}\right] \text{ equivale a:}$$

A) $\frac{n+2}{n+1}$ B) $\frac{1}{n+1}$ C) $\frac{n+1}{n+3}$

D) $\frac{1}{2n}$ E) $\frac{n}{n+1}$

**41.** Marcar verdadero (V) o falso (F):

I) $\sum_{k=1}^{n} C a_k = C\sum_{k=1}^{n} a_k$ si C = cte
..................( )

II) $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
..................( )

III) $\sum_{k=1}^{n}(x^k) = \frac{x^n - 1}{x-1}$ ; $\forall x \neq 1$
....................( )

A) VVF B) FFF C) FFV
D) VFV E) VVV

**42.** El equivalente de:

$$e^{-11} + e^{-12} + e^{-13} + e^{-14} + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{e}\right)^{100}$$

es:

A) $\frac{1}{e^{100}} - 1$

B) $\frac{e^{90}-1}{e^{100}}$

C) $\frac{1-e^{89}-1}{(1-e)e^{99}}$



D) $\frac{1+e+e^2+.........+e^{89}}{e^{100}}$

E) $e^{-100}+e^{-99}-e^{-98}+....+e^{-10}$

**43.** Si: $0<x<1$; el equivalente de:

$1+3x+4x^2+7x^3+9x^4+..........$es:

A) $\frac{1}{1-x}$ B) $\frac{1+x^2}{1-x}$ C) $\frac{1+x}{(1-x)^2}$

D) $\frac{1-x}{(1+x)^2}$ E) $\frac{1}{x}$

**44.** Calcular el límite de la siguiente sucesión:

$$\left\{\sqrt[n]{\frac{2}{8}\cdot\frac{5}{23}\cdot\frac{10}{48}\cdots\cdots\cdots\frac{n^2+1}{5n^2+3}}\right\}_{n\geq 1}$$

A) 1/5 B) 2/5 C) 3/5
D) 4/5 E) 7/12

**45.** La sucesión:

$$\left\{\frac{n}{\sqrt{9n^4+1}}\left[\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{9}{3}}+\sqrt{\frac{13}{4}}+....+\sqrt{\frac{4n+1}{n+1}}\right]\right\}$$

Converge a:
A) 1/2 B) 1/4 C) 2/3
D) 1/3 E) 3/7

**46.** Con respecto a la sucesión:

$$\left\{\frac{2^n+n^4}{3^n-n^7}\right\}_{n\geq 1}$$

A) Converge a 1/2
B) Converge a 3/4
C) Converge a 1
D) Converge a cero
E) Es divergente

**47.** Con respecto a la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n^2+n+2}{Ln(n+1)}\right]$$

A) Convere a Ln2
B) Converge a $\frac{1}{Ln2}$
C) Converge a 1
D) Es oscilante
E) Es divergente

**48.** Con respecto a la serie:

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(n+3)}{3!n!3^n}\right]$ se afirma que:

A) Es convergente
B) Es divergente
C) Es oscilante
D) Es constante
E) Es alternante

**49.** Sea: $a_0=\frac{1}{2}$, para k = 1,2....... se cumple:

$$a_k=\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+.....+\frac{1}{2^k+2^k}$$

Luego la serie

$a_0+a_1+a_2+.......+a_k$:

A) Converge a cero
B) Crece indefinidamente
C) Converge a 1/2
D) Converge a 1
E) Oscila al crecer k

**50.** Si:

$$a_n=\frac{2+5+8+..........+(3n-1)}{4+7+10+.........+(3n+1)}$$

Proporcionar el valor de verdad de la siguientes afirmaciones.

I) $a_n < a_{n+1}$ , $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ .........( )

II) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 1$ .....................( )

III) $a_n \leq 3/4$ ; $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ .........( )

A) VVV B) VFV C) FFV
D) VVF E) FVV

**51.** La serie: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(3\pi)^{-4k+2}$ converge a:

A) $\dfrac{(3\pi)^8}{(3\pi)^4-1}$ B) $\dfrac{(3\pi)^6}{(3\pi)^4-1}$

C) $\dfrac{3\pi}{3\pi-1}$ D) $\dfrac{3\pi}{(3\pi-1)^2}$

E) $3\pi$

**52.** Marcar verdadero (V) o falso (F)

I) La serie: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{2+\text{Sen}^3(n+1)}{2^n+n^3}\right]$

es convergente .................( )

II) La serie: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{\sqrt{n}+3}{n^3}\right]$

es divergente .................( )

III) La serie: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{n}{(4n-1)(n+15)}\right]$

es convergente .................( )

A) VVV B) FFF C) VFF
D) VFV E) FVF

**53.** La serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\left(3^{-n}+4^{-n}\right)^2\right]$$

converge a:

A) $-\dfrac{619}{2210}$ B) $-\dfrac{691}{2021}$ C) $-\dfrac{619}{2102}$

D) $-\dfrac{619}{2210}$ E) $-\dfrac{691}{2210}$

**54.** La sucesión: $\{a_n\}_{n\geq 1}$ donde

$a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{k+1}{k^2(k+2)^2}\right]$ converge a:

A) 3/16 B) 5/16 C) 7/16
D) 9/16 E) 11/16

**55.** Calcular:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n^2-1)(n^2-2)(n^2-3)\ldots\ldots\ldots(n^2-n)}{(n^2+1)(n^2+3)(n^2+5)\ldots\ldots\ldots(n^2+2n+1)}\right]$$

A) 1 B) e C) $e^{3/2}$
D) $e^{-2/3}$ E) $e^{-3/2}$

**56.** Demostrar que la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2^n+n^2+n}{n(n+1)2^{n+1}}\right]$$

Es convergente luego proporcionar su suma:

A) 1 B) 1/2 C) 1/9
D) 2 E) 1/8

**57.** En una progresión geométrica se puede considerar que $a_1$ ; $a_3$ ; $a_5$ equivalen a los términos $b_1$; $b_4$; $b_{16}$ de una progresión aritmética. Halle el $b_{20}$ de esta progresión aritmética; si $b_1 = 5$.

A) 150 B) 100 C) 120
D) 140 E) 130



**58.** Si los números $a_1$; $a_2$; .......... $a_{11}$ están en progresión aritmética creciente. Sabiendo además que: $\sum_{i=1}^{11} a_i = 11$ y $\sum_{j=1}^{11} a_j^2 = 121$. Determine el valor de $a_3 + a_7$.

A) 6 B) 7 C) 9
D) 10 E) 0

**59.** Reducir:

$$3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+.....$$

A) $\frac{7}{2}$ B) 4 C) $\frac{9}{2}$

D) 5 E) $\frac{11}{2}$

**60.** Determinar el décimo quinto término de una P.A. si la suma de «n» términos está determinada por:

$$S_n = n(n+8)$$

A) 35 B) 36 C) 37
D) 38 E) 39

**61.** En la P.A. ÷ 10.........76.........100 el número de términos comprendidos entre 10 y 76 es el triple de los términos comprendidos entre 76 y 100. Calcular la suma de los términos de la progresión dada.

A) 170 B) 1570 C) 5107
D) 5710 E) 7810

**62.** Dada la sucesión:

$1\cdot3$ ; $3\cdot5$ ; $5\cdot7$....;$(2k-1)(2k+1)$....

Calcular $S_n$ para luego dar como respuesta: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{n^3}\right)$

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{4}{3}$

D) $\frac{3}{4}$ E) 1

**63.** Se tiene una progresión aritmética decreciente cuyo número de medios aritméticos es 945; sabiendo que la suma de término de lugar 48 y el término del lugar 900 es igual a 3040. Halle usted el término central de la P.A.

A) 420 B) 860 C) 1540
D) 1520 E) 1620

**64.** A lo largo de un camino había un número impar de piedras a 10 metros una de otra; se quizo juntar estas piedras en el lugar donde se encontraba la piedra central. El hombre encargdado podía llevar una sola piedra; empezó por uno de los extremos y las trasladaba sucesivamente. Al recoger todas las piedras el hombre camino 3km. ¿Cuantas piedras había?

A) 23 B) 25 C) 27
D) 21 E) 29

**65.** El número de términos de una P.A. es impar, la suma de los términos de lugar impar es 120, la de los lugar par es 96. Halle el número de térmios de la P.A.

A) 7 B) 11 C) 9
D) 13 E) 15

**66.** La suma de «n» tèrminos de una P.A. aumenta en 2490 si se consideran 15 términos más. Si el término de llugar (n + 10) es 180. Hallar el término de lugar: (n – 10)

A) 20 B) 30 C) 40
D) 50 E) 60

**67.** En una P.A. «n» términos de la suma de los (n–1) primeros términos es «n» y la suma de los (n–1) últimos términos es «$n^2$». Hallesé la razón de dicha progresión.

A) – n B) n C) $n^2$
D) n – 1 E) 2n

**68.** Al sumar los términos correspondientes antes de dos progresiones geométricas, la primera de las cuales admite por ptimer término a la unidad se ha obtenido una nueva serie de elementos:

3 : 2 : 11/8 .............

Calcular la razón de la segunda P.G si es mayor que 0,5.

A) 0,60 B) 0,65 C) 0,70
D) 0,75 E) 0,80

**69.** Hallar la razón de una P.G de 20 términos si el cociente de dividir el primer término con el útimo es 7.

A) $\sqrt[19]{1/7}$ B) $\sqrt[19]{7}$ C) $\sqrt[7]{19}$
D) $\sqrt[7]{1/19}$ E) $\sqrt[7]{7}$

**70.** Dado: $\frac{1}{x-2}; \frac{1}{x}; \frac{1}{x+2}$

Hallar «x» sabiendo que al disminuirle a cada término dado (en ese orden) 1/8 se forma una P.G.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

**71.** Tres números positivos cuya suma es 21 forman una P.A. si a estos números le agregamos respectiva-mente 2,3 y 9 los nuevos números forman ahora una P.G.

¿Calcular el término central de la P.A.?

A) 5 B) 9 C) 11
D) 7 E) 3

**72.** La suma de tres términos positivos en P.A. es 18 si a estos números se les suma 2,4 y 11 respectiva- mente los nuevos números forman una P.G. Hallar el mayor término de la P.A.

A) 3 B) 5 C) 6
D) 7 E) 9

**73.** En una progresión geométrica decreciente e ilimitada la suma de sus términos es 2/3 y la suma de los cuadrados de sus términos es 1/4. Calcular la suma de los dos primeros términos.

A) $\frac{384}{625}$ B) $\frac{382}{615}$ C) $\frac{482}{625}$

D) $\frac{238}{615}$ E) $\frac{321}{603}$

**74.** Se deja caer una pelota desde una altura de 90m en cada rebote la pelota se eleva 1/3 de la altura de la cual cayó la última vez. ¿Qué distancia recorre la pelota hasta quedar en reposo?

A) 90m B) 50m C) 100m
D) 180m E) 190m

**75.** Luego de resolver el sistema:

z – 5x – 2y = 10
4y + 3z = – 40

Donde x; y; z son tres términos consecutivos de una P.G. decreciente (en ese orden). Cuanto se le debe sumar al término central de esta P.G. de tal forma que se genera una P.A.

A) 1 B) 2 C) – 1
D) – 2 E) – 4



**76.** El producto de los términos de lugar impar de una P.G de número impar es 65536 y el producto de los de lugar par es 4096. Calcular el término central de la P.G y el número de términos de la misma.

A) 7 B) 9 C) 11
D) 5 E) 13

**77.** En un círculo de radio «R» se inscribe un cuadrado en este cuadrado se inscribe un circulo: en este otro cuadrado y así sucesivamente (indefinidamente) se quiere saber el límite de la suma de las áreas de los círculos.

A) $3\pi R^2$ B) $4\pi R^2$ C) $2\pi R^2$
D) $4\pi R$ E) $5\pi R^2$

**78.** Hallar la suma de los «n» primeros términos de la sucesión:

$$1\cdot 1 ; 2\cdot 3 ; 3\cdot 5 ; 4\cdot 7 ;.........$$

A) $\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{6}$

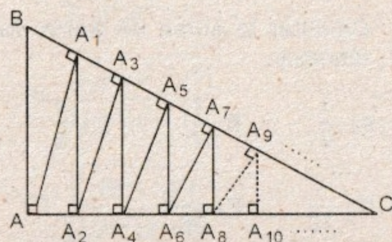
B) $\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{3}$

C) $\dfrac{(n+1)(n+2)(2n-3)}{6}$

D) $\dfrac{n(n+1)(4n+1)}{3}$

E) N.A.

**79.** Si:




Siendo: $\overline{AB} = a$ $\overline{AC} = b$

Calcular:

$$E = \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + ......$$

A) ab B) a/b C) $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

D) $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}-b}$ E) $a+\sqrt{ab}+b$

**80.** Calcular «a» si:
6 ; 3 ; 2 ; a ..... se encuentra en P.H

A) 3/2 B) 3/4 C) 3/8
D) 2/3 E) 4/3

**81.** Interpolar 40 medios armónicos entre 7 y 1/6, indicar el mayor.

A) 7/2 B) 7/3 C) 7/4
D) 7/5 E) 7/6

**82.** Si: $a^2$ , $b^2$ , $c^2$ estan en P.A. Qué se puede decir:
(b + c), (c + a), (a + b)

A) Están en P.A.
B) Están en P.G
C) Están en P.H
D) Simplemente es una sucesión
E) Estan en P.A.O.S

**83.** Los coeficientes de una ecuación de segundo grado forman una progresión aritmética la suma de las raíces representa la tercera parte de la suma de los términos de la progresión y el producto de las raíces excede en 7 unidades al coeficiente del segundo término. ¿Cuál es dicha ecuación, señale su término constante?

A) 3 B) 8 C) 13
D) 15 E) 19

**84.** Se da una progresión:

$-30 \cdot -19 \cdot -8$............

Hallar dos términos consecutivos de esa progresión de manera que sus raíces cuadradas se diferencian en una unidad. Indicar como respuesta el mayor de los términos.

A) 36 B) 49 C) 25
D) 64 E) 81

**85.** Dos poblaciones A y B tienen hoy 262440 y 585640 habitantes respectivamente suponiendo un aumento anual a A y una disminución a B en progresión geométrica siendo las razones 10/9 y 10/11. ¿Dentro de cuanto tiempo tendrán las 2 poblaciones el mismo número de habitantes?

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

**86.** Un ciclista parte a las 12 recorriendo en la primera 8km; 12 en la segunda, 18 en la tercera y así sucesivamente en progresión geométrica. Después de un cierto tiempo de marcha descansa tres horas y parte de nuevo recorriendo 24,3 km en la primera hora, 16,2 en la segunda continunando en progresión geométrica decreciente hasta andar una hora menos que las andadas antes del descanso. El recorrido total fue de 164 km. ¿A qué hora se paró a descansar el ciclista?

A) 3 pm B) 4 pm C) 5 pm
D) 6 pm E) 7 pm

**87.** Las medias aritméticas y geométricas y el menor de dos números forman una P.A. ¿Cuál es el mayor de los números si se diferencian en 64?

A) 72 B) 84 C) 27
D) 8 E) 92

**88.** La suma de los «n» primeros términos de una progresión geométrica está dada por:

$$S_n = 5^{n+1} - 5$$

Indicar el valor de:

$$L = \sqrt{T_5 - T_3}$$

A) 4000 B) 3500 C) 3000
D) 2500 E) 2000

**89.** Examinar atentamente:

$$\begin{array}{c} 2 \\ 3 \quad 3 \\ 4 \quad 6 \quad 4 \\ 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \\ 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

Proporcionar el promedio aritmética de todos los números si hay «10» filas.

A) 72,04 B) 73,03 C) 74,03
D) 74,5 E) 76

**90.** Dada la sucesión:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\ ;\ \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\ ;\ \frac{1}{k(k+1)(k+2)}......$$

Calcular la suma de todos sus términos.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$

D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{16}$

**91.** Si la suma de 9 términos de la siguiente sucesión:

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}};\frac{1}{1-x};\frac{1}{1-\sqrt{x}}\text{.......es 27}$$

Determinar: x

A) $\frac{7+\sqrt{33}}{6}$  B) $\frac{7+\sqrt{23}}{6}$

C) $\frac{7-\sqrt{14}}{6}$  D) $\frac{9+\sqrt{33}}{6}$

E) $\frac{9-\sqrt{31}}{5}$

**92.** Dada una progresión aritmética creciente de 3 términos enteros y positivos si a su primer término le sumamos 2 y al tercer término le sumamos 6 se obtiene una progresión geométrica. Hallar un posible valor de la suma de los elementos de la P.A.

A) 54  B) 72  C) 48
D) 108  E) 116

**93.** Los números: $x_1, x_2, x_3, ......\wedge x_n$ forman una P.A. Hallar la razón de dicha progresión si:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+....+x_n=a$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+.......+x_n^2=b^2$$

A) $\sqrt{\frac{12(b^2-na^2)}{n^2(n^2-1)}}$

B) $\sqrt{\frac{12(nb^2-a^2)}{n^2(n^2-1)}}$

C) $\sqrt{\frac{n(b^2-a^2)}{12n^2(n^2-1)}}$

D) $\sqrt{\frac{12(nb^2-a^2)}{n(n-1)}}$

E) $\sqrt{\frac{12(b^2-na^2)}{n(n-1)}}$

**94.** Durante el mismo número de días se han sacado de dos tanques "A" ∧ "B" cantidades diferentes de agua. De «A» se sacó 1 litro el 1er día, 4 litros el 2do día, 16 litros el tercer día, etc, mientras que de «B» se saco 2 litros el primer día, 4 litros el segundo día, 8 litros el 3er día, etc. Si en total de «A» se sacaron 1239 litros más que del tanque «B». ¿Cuántos litros se sacó el último día en «A»?

A) 512 litros  B) 526 litros
C) 1024 litros  D) 2048 litros
E) 4096 litros

**95.** Efectuar la adición mostrada:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{3}{9}+\frac{7}{27}+\frac{15}{81}+......$$

A) 3/2  B) 2  C) 5/2
D) 7/2  E) 9/2

**96.** En un cuadrado cuyo lado mide «m» se unen los puntos medios de los cuatro lados y se forma otro cuadrado cuyos puntos medios de sus cuatro lados se unen también para formar un nuevo cuadrado y así sucesivamente encontrar el límite de la suma de las áreas de todos los cuadrados así formados.

A) m  B) $m^2$  C) $\frac{m}{2}$

D) $\frac{m}{4}$  E) $2m^2$

**97.** Halle la suma de los «n» primeros términos de la sucesión:

$1\cdot 2 ; 2\cdot 3 ; 3\cdot 4 ; 4\cdot 5$ ...........

A) $(n-1)(n-2)(n+3)$
B) $n(n+3)(n+5)$
C) $n(n+1)(n+2)$
D) $(n+1)(n+2)(n+3)$
E) $n(n-2)(n+4)$

**98.** Mostrar la suma de los «n» primeros términos de la sucesión:

$1\cdot 3\cdot 5 ; 3\cdot 5\cdot 7 ; 5\cdot 7\cdot 9 ; 7\cdot 9\cdot 11$;......

A) $\frac{1}{8}\left[(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)+15\right]$

B) $\frac{1}{4}\left[(2n-1)(n+3)(n-4)+1\right]$

C) $\frac{1}{4}\left[(2n+1)(2n+3)(2n+5)+15\right]$

D) $\frac{1}{8}\left[(2n-1)(2n+1)(2n+3)(n+1)-15\right]$

E) $\frac{1}{8}\left[(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)+9\right]$

**99.** Si a; b ; c son términos de una progresión geométrica creciente, simplificar:

$$\frac{b-c}{\sqrt{(a+d)(b+c)-(a+c)(b+d)}}$$

A) 1 B) – 1 C) 1/2
D) – 1/2 E) 2

**100.** Proporcionar el trigésimo término de la sucesión:

1 ; (2+3) ; (3+4+5) ; (4+5+6+7);.....

A) 175 B) 215 C) 357
D) 435 E) 425

**101.** En la P.A.: 2.....47......172 el número de medios interpolados entre 47 y 172 es «m» veces el número de medios interpolados entre 2 y 47. Si la suma de todos los términos de la progresión es 3045, hallar «m».

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

**102.** Si $a ; b \wedge c$ están en progresión armónica, entonces las expresiones mostradas (en ese orden)

$$\frac{2a-b}{2} ; \frac{b}{2} ; \frac{2c-b}{2}$$

A) Están en P.A.
B) Están en P.G.
C) Están en P.H.
D) Son iguales
E) No afirman nada

**103.** Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$ converge a 0.

II. $\left\{\left(\frac{2d}{3b}\right)^{n+1}\right\}$, siendo $b > d > 0$ es una sucesión convergente.

III. $a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+....+\frac{n}{n+1}\right)$ converge a 1.

A) VVF B) FVF C) VVV
D) FVV E) FFV

**104.** Se define la sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$ ;

donde $x_{n+1} = \frac{1+x_n}{1-x_n}$ ; $x_1 = 2$.



Determine el valor de verdad de los enunciados:

I. Es convergente

II. Es acotada

III. $x_{2010} = -3$

A) VVV B) FVF C) FVV
D) FFV E) FFF

**105.** Indique el valor de verdad de la siguientes proposiciones:

I. La sucesión: $a_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2}$ es una sucesión convergente y su valor de convergencia es 1.

II. $\left\{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}\right\}$ es una sucesión no convergente.

III. La sucesión $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n-10} & ; n \neq 10 \\ 0 & ; n = 10 \end{cases}$ converge a 0.

A) VFV B) VFF C) FVV
D) FVF E) FFV

**106.** Halle la suma de los 8 primeros términos de la sucesión $\{a_n\}$:

$$a_n = \begin{cases} n \ ; \text{ si n es impar} \\ \frac{1}{2}n ; \text{ si n es par y no divisible entre 4} \\ \frac{1}{2}(a_{n-2} + a_{n-1}) ; \text{ si n es par y divisible entre 4} \end{cases}$$

A) 22 B) 25 C) 27
D) 30 E) 36

**107.** Determine el valor de:

$$S = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{2+2n+n^2}{1+2n+n^2} \right)^{n^2+2n}$$

A) 1 B) e C) 2e
D) 3e E) $e^2$

**108.** A partir de que lugar los términos de la sucesión $\left\{2; \frac{11}{8}; \frac{7}{6}; \frac{17}{16}; ......\right\}$ son menores de $\frac{4}{5}$.

A) 14 B) 20 C) 21
D) 25 E) 26

**109.** Indique la proposición verdadera para la sucesión $\{a_n\}$, donde:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right) ; \ n \in \mathbb{N}$$

A) Es una sucesión monótona convergente.
B) Es una sucesión acotada convergente.
C) Es una sucesión divergente y nonótona.
D) Es una sucesión divergente acotada.
E) Es una sucesión no monótona y no acotada.

**110.** Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La sucesión $\left\{\frac{a^n}{n}\right\}$ con a > 2 es convergente.

II. La sucesión

$\left\{\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}}\right\}$ es acotada.

III. Si $\{a_n\}$ es creciente y acotada; entonces $\{a_n\}$ es convergente.

A) VVV B) VFF C) VVF
D) FVV E) FFF

**111.** Sea $\{a_n\}$ una sucesión definida por: $a_n = \dfrac{\sqrt{n-1}-1}{\sqrt{n}}$, entonces la sucesión converge al valor.

A) 0 B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{2}$ E) 1

**112.** Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La sucesión $\left\{\dfrac{2n-1}{n}\right\}$ es creciente.

II. Si $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes.

III. La sucesión $\left\{\dfrac{2n}{n^2+1}\right\}$ es acotada

A) VVV B) FFV C) FFF
D) VFV E) VFF

**113.** Dada la siguiente sucesion:

$$\{a_n\}_{n\geq 1} = \left\{\frac{2}{7};\frac{5}{11};\frac{8}{15};\frac{11}{19};....\right\}$$

Indique cuál(es) de los enunciados siguientes son correctos:

I. El término de lugar 73 es $\dfrac{218}{295}$

II. La sucesión es acotada

III. La sucesión es convergente

A) Sólo I B) Sólo II C) I y II
D) I y III E) I; II y III

**114.** Determine la veracidad (V) o falsedad (F) de:

I. $\{3n-1\}$ es creciente

II. $\left\{\dfrac{n}{3^n}\right\}$ es decreciente

III. $\left\{\dfrac{5n-1}{3n+1}\right\}$ es decreciente

A) VFF B) FVF C) FFV
D) VVF E) VFV

**115.** Calcule el término 10 de la sucesión:

$$\left\{\frac{2}{5};\frac{5}{7};\frac{8}{9};1;....\right\}$$

A) $\frac{11}{4}$ B) $\frac{15}{2}$ C) $\frac{7}{3}$

D) $\frac{29}{23}$ E) $\frac{15}{12}$

**116.** Calcule:

$$S = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} 1+1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} 1+2} + 2\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(i+1)(i+2)i}$$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$
D) 0 E) 1

**117.** Calcule la siguiente suma:

$$S=\sum_{k=7}^{10}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k+3}(k-j+1)^2$$

A) – 164 B) – 100 C) 164
D) 200 E) 300

**118.** Determine el valor de:

$$E=\sum_{k=1}^{n}k\,2^k-\sum_{k=1}^{n}k\,2^{k-1}$$

A) $(n-1)\cdot 2^n$

B) $1+(n-1)\cdot 2^n$

C) $2+(n-1)\cdot 2^{n+1}$

D) $4+(n-1)\cdot 2^n$

E) $2^n(n+1)+1$

**119.** Determine la suma finita

$$\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{1}{25k^2+35k+6}\right)$$

A) $\frac{1}{66}$ B) $\frac{1}{33}$ C) $\frac{2}{33}$

D) $\frac{5}{66}$ E) $\frac{5}{33}$

**120.** Calcule:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{24}{n^4}j^2-\frac{18}{n^3}i\right)$$

A) – 2 B) – 1 C) 0
D) 1 E) 2

**121.** Calcule:

$$\frac{1}{n(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=2}^{n}k+\sum_{k=3}^{n}k+\ldots n \text{ sumatorias}\right)$$

A) $\frac{2n+1}{2}$ B) $\frac{2n+1}{6}$ C) $\frac{n+2}{3}$

D) $\frac{2n+1}{3}$ E) $\frac{n}{3}$

**122.** Indique los valores de verdad en:

I. Si $\sum_{i=6}^{n}2(i-5)=306$; entonces n=22.

II. $\sum_{i=4}^{19}\left(\frac{1}{i^2+i}\right)=\frac{1}{5}$

III. $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i!}\right)\le 2-\frac{1}{2^{n-1}}$

A) VFV B) VVF C) FVV
D) VVV E) FVF

**123.** Sea la serie:

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\right\}=\{S_n\}=\left\{\sum a_n\right\}$$

Indique el valor de verdad de los enunciados siguientes:

I. $a_n=\frac{(2n+1)\sqrt{2n+1}+(2n-1)\sqrt{2n-1}}{2}$

II. $S_{40}=364$

III. $\{S_n\}$ converge a 1000

A) VVV B) VFF C) VVF
D) FVF E) FFF

**124.** Halle el valor de verdad de las afirmaciones siguientes:

I. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Sen(n^4)}{\sqrt{n^4+1}}$ es convergente.

II. La serie $S=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+.....$ converge a 1.

III. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{Sen}\left(\frac{2}{n}\right)$ es divergente

A) VVV B) VFV C) FVV
D) FFV E) VFF

**125.** Determine el valor de convergencia de:

$$F=\sum_{k=2}^{\infty}\left(\sqrt{1+k^{-2}+(k+1)^{-2}}-\sqrt{1+k^{-2}+(k-1)^{-2}}\right)$$

A) $-\frac{1}{2}$ B) $-1$ C) $-\frac{3}{2}$

D) 1 E) $\frac{3}{4}$

**126.** Determine:

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n^3}3^{-n}+3^{-2n}\right]$$

A) $-1$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$

D) 2 E) $\frac{15}{8}$

**127.** Determine el valor de convergencia de la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+5)}$$

A) $\frac{23}{90}$ B) $\frac{25}{90}$ C) 2

D) 3 E) 5

**128.** Indique el valor de verdad de los siguientes enunciados:

I. Si $\{a_n\}$ es convergente; entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

II. Si $\{a_n\}$ es alternante, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}$ converge.

III. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n-2}\right)$ diverge.

A) VVV B) VFF C) FVF
D) FFV E) FFF

**129.** Halle el valor de convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right]$$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{2}{3}$

**130.** Determine el punto de convergencia de la serie definida mediante la siguiente sucesión:

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(3k^{10}-k^{9}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}}{k^{9}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

A) 36 B) 38 C) 42
D) 44 E) 46



**131.** Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ es convergente, entonces $\lim_{n\to+\infty}(a_n)=0$

II. Si $\lim(a_n)\neq 0$; entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ diverge.

III. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{n\cdot n!}$ es convergente

A) VFF B) VVF C) FVV
D) VVV E) FFF

**132.** Una pelota se deja caer de una altura de 10m y empieza a rebotar. La altura de cada salto es de tres cuartas partes de la altura del salto anterior.
Halle la distancia vertical total recorrida por la pelota.

A) 20 B) 35 C) 40
D) 60 E) 70

**133.** Determine el valor de convergencia de la siguiente serie:

$$S=1+\frac{2}{9}+\frac{26}{3^6}+\frac{242}{3^{10}}+....$$

A) $\frac{3}{80}$ B) $\frac{19}{80}$ C) $\frac{59}{80}$

D) $\frac{91}{80}$ E) $\frac{101}{80}$

**134.** Halle el valor de t en:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(10t)^k=1993$$

A) $\frac{996}{995}$ B) $\frac{995}{996}$ C) $\frac{996}{9965}$

D) $\frac{997}{9965}$ E) $\frac{999}{9965}$

**135.** Respecto a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ con

$$a_n=\frac{3n^2-2n+1}{3n^2+2n-1}.$$

Indique cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas:

P : converge a 1
q : converge a 0
r : diverge

A) Sólo P B) Sólo q C) Sólo r
D) Sólo P y q E) Ninguno

**136.** Determine el valor de:

$$E=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n^3}(2)^{-n}$$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$

D) 1 E) 2

**137.** Si $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)=A$; halle el valor de:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

A) $\frac{A}{3}$ B) $\frac{3A}{8}$ C) $\frac{A}{2}$

D) $\frac{3A}{4}$ E) $\frac{4A}{5}$

**138.** Determine el valor de:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n^2+n}\,2^{-3n}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{5}$

D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{7}$

**139.** La suma de los tres primeros términos de una progresión aritmética es 27. Si el primero aumenta en 1; el segundo no cambia y el tercero aumenta en 11; los números forman una progresión geométrica. Halle el décimo término de la progresión aritmética, si es creciente.

A) 63 B) 65 C) 72

D) 79 E) 81

**140.** Si: $S_1$ ; $S_2$ ; $S_3$ representan la suma de «n» términos de 3 progresiones aritméticas que comienzan con la unidad y cuyas razones son: 1 ; 2 y 3; calcule el valor de: $E=\frac{S_1+S_3}{S_2}$.

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 6

**141.** En una progresión aritmética el primer término excede en dos a la razón y el séptimo térmio es tres veces el segundo. Halle el décimo término.

A) 24 B) 30 C) 36

D) 42 E) 48

**142.** La suma del quinto término más el octavo de una progresión geométrica es 1,125 y el cociente 8. Calcule el primer término.

A) 2 B) 4 C) 8

D) 16 E) 32

**143.** Cierto obrero deberá llevar una carretila de arena al pie de cada uno de los 31 postes que estan al lado de una pista recta, la distancia entre los postes es de 5m y la cantera de arena está 12m antes del primer poste. ¿Qué distancia habrá recorrido después de haber terminado su trabajo y vuelto la carretilla a la cantera?

A) 5394 B) 5415 C) 5480

D) 5510 E) 5680

**144.** Conociendo la suma $S_n$ de los «n», primeos términos de una progresión geométrica y la suma de las reciprocas de estos términos. Halle el producto Pn de los «n» primeros términos de la progresión

$(\overline{S}n = \text{Suma de las reciprocas})$

A) $\left(S_n\ \overline{S}_n\right)^n$ B) $\left(\frac{S_n}{\overline{S}_n}\right)^{2n}$

C) $\left(\frac{\overline{S}_n}{S_n}\right)^{\frac{n}{2}}$ D) $\left(\frac{S_n}{\overline{S}_n}\right)^{\frac{n}{2}}$

E) $\left(\frac{S_n}{\overline{S}_n}\right)^{n+1}$



**145.** Si el término de lugar «2n» es n veces el término de lugar «n» en una progresión geométrica cuyo primer término es «n». Determine el término de lugar n+1 de dicha progresión.

A) n  B) 2n  C) 3n
D) $n^2$  E) $2n^2$

**146.** Las edades de tres personas forman una progresión aritmética creciente. Si se sabe además que la suma y la suma de cuadrados de dichas edades es 63 y 1395 respectivamente. Halle la edad de la personas mayor.

A) 14  B) 15  C) 18
D) 21  E) 27

**147.** En la siguiente progresión aritmética 542; 533 ; 524 ; ....... el 1er término negativo es:

A) – 8  B) – 7  C) – 6
D) – 5  E) – 4

**148.** Durante el mismo número de días se han sacado de dos tanques M y N; cantidades diferentes de agua. De M se saco 3 $\ell$i, el 1er día; 12 $\ell$i el segundo día; 48 $\ell$i, el tercer día; etc. De N se sacó 30 $\ell$i, el primer día; 60 $\ell$i, el segundo día; 120 $\ell$i, el tercer día, etc. Si en total de M se sacará 93 Lts, más que del tanque N. ¿Cuántos litros ($\ell$i) se sacó el último día de M?

A) 740  B) 748  C) 760
D) 768  E) 800

**149.** Un alumno de nuestra academia lee un libro de tal manera que cada día aumenta en 4 el número de páginas que leyó el día anterior; si después de 18 días ha leído las $\frac{21}{55}$ del libro y 6 días más tarde le faltaban únicamente las $\frac{19}{55}$ del libro. ¿Cuántas hojas tiene el libro?

A) 800  B) 890  C) 900
D) 990  E) 1000

**150.** Entre 2 y 1458 y entre 5 y 135 se han interpolado el mismo número de medios geométricos. Señale el número de medios interpolados de manera que la razón de la primera sea el triple de la razón de la segunda.

A) 2  B) 3  C) 4
D) 5  E) 6

**151.** Un contratista conviene en ejecutar una obra en un cierto tiempo y con este fin contrata 150 hombres. Después del primer día se retiran 4 hombres diariamente, por lo cual la obra se termina 8 días después de lo convenido. Calcule el número de días empleadoas en la construccion de la obra.

A) 17  B) 18  C) 25
D) 28  E) 32

**152.** Sea la progresión:

$\div\div U_1; U_2 ; U_3 ; U_4 ; U_5 ; U_6 ; .....$

Se cumple que $U_{m+n} = x$ ; $U_{m-n} = y$; $m,n \in Z^+$ ; $m > n$, luego $U_m$ es igual que:

A) $xy$  B) $\sqrt{xy}$  C) $\sqrt[4]{xy}$
D) $\frac{1}{\sqrt{xy}}$  E) $\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}$

**153.** Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. La sucesión $\left\{ \text{Log}\left(\frac{n+1}{n}\right) \right\}_{n\geq 1}$ es creciente.

II. La sucesión $\left\{ \frac{n^2}{n-1} \right\}_{n\geq 2}$ es creciente

III. La sucesión $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2n+3}}+1 \right\}_{n\geq 1}$ es decreciente.

A) VFV B) FFV C) VVV
D) FVV E) VVV

**154.** En la siguiente sucesión:
6; 17; 34; 57; 86. Halle la diferencia entre el penúltimo término de 3 cifras y el 3er término de 4 cifras.

A) 440 B) 213 C) 222
D) 321 E) 231

**155.** En la siguiente sucesión existen 49 términos ¿Cuántos términos habrá entre los términos 3a y 3b de dicha sucesión?
a , a+1 , a+2 ,......, b –1 , b

A) 143 B) 541 C) 622
D) 706 E) 849

**156.** Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. $a_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+k}\right)$; entonces $\{a_n\}$ es decreciente y acotada.

II. Si $\{a_n\}$ es tal que:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

entonces $\{a_n\}$ es decreciente.

III. Si $\{a_n\}$ es una sucesión creciente y acotada, entonces $\{a_n\}$ es convergente.

A) VVV B) VFV C) VVF
D) FVV E) FFV

**157.** Dada la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$$

Determine la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes afirmaciones:

a. La sucesión es decreciente y acotada.
b. La sucesión es creciente
c. La sucesión es acotada

A) FVV B) FVF C) VFF
D) VVF E) FFF

**158.** Indique el valor de verdad:

I. Toda sucesión convergente es acotada.
II. Toda sucesión monótona y acotada es convergente.
III. Toda sucesión acotada es convergente
IV. Toda sucesión decreciente y acotada inferiormente es convergente.

A) VVFV B) VFVV C) VFFV
D) FFFV E) FFVV

**159.** Determine la convergencia de la sucesión:

$$\left\{ \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+1}{\sqrt{n^2+n}-n-\sqrt{n}} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

A) – 5 B) – 4 C) – 3
D) – 2 E) 1



**160.** Determine la verdad (V) o falsedad (F) de la siguientes afirmaciones:

I. La sucesión $\left\{\dfrac{(-1)^n}{2n^2+1}\right\}_{n\in N}$ es acotada.

II. La sucesión:

$\left\{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-1}\right\}_{n\in N}$

es divergente

III. La sucesión $\left\{\dfrac{2^n+3^{n+1}}{3^n+2^{n+1}}\right\}_{n\in N}$ es monótona.

A) VVV B) VFV C) FVV
D) VVF E) FFV

**161.** Sea: $x_1>1$ y $x_{n+1}=2-\dfrac{1}{x_n}$; $\forall n\in\mathbb{N}$; indique el valor de verdad:

I. $(x_n)$ es acotada

II. $(x_n)$ es monótona

III. $(x_n)$ es convergente

IV. $(x_n)$ es divergente

A) VVVF B) FFFV C) FFFF
D) VFFF E) FFVF

**162.** Dada la sucesión $\left(\sqrt[n]{n!}\right)_{n\in N}$; indique el valor de verdad:

I. Es divergente

II. Es convergente

III. Es monótona

IV. Es acotada

A) VFVF B) VFFV C) VFFF
D) FVVV E) FVFV

**163.** Dada la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ tal que

$a_n=\dfrac{\left[\!\left[\frac{n}{3}\right]\!\right]}{5n+1}$ determine la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes afirmaciones:

I. La sucesión es convergente

II. La sucesión es divergente

III. La sucesion es acoatada

A) VFF B) FVF C) VFV
D) VVV E) FFF

**164.** Indicar si a las siguientes sucesiones le corresponde la regla de formación presentada:

I. $1,-x,\dfrac{x^2}{2},\dfrac{-x^3}{3},\ldots a_n=\dfrac{(-x)^{n-1}}{n-1}$

II. $1,\dfrac{x}{\sqrt{2}},\dfrac{x^2}{\sqrt{3}},\dfrac{x^3}{2},\ldots a_n=\dfrac{x^{n-1}}{\sqrt{n}}$

III. $x,\dfrac{-x^3}{6},\dfrac{x^5}{120},\dfrac{-x^7}{5040},\ldots a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

A) VVV B) FVV C) FFV
D) VFF E) FVF

**165.** Indicar en que caso converge la siguiente sucesión:

$$S_n=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots}{b_mx^m+b_{m-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{m-2}+\ldots}$$

en los siguientes casos; las a, b, n $\wedge$ $m\in\mathbb{N}$

I. $n>m$

II. $n=m$

III. $n<m$

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) I y II E) II y III

**166.** Determine el término de lugar 10 en la sucesión.

$$\left\{1;1;\frac{4}{5};\frac{11}{17};\frac{7}{13};\frac{17}{37};....\right\}$$

A) $\frac{53}{19}$ B) $\frac{59}{71}$ C) $\frac{29}{101}$

D) $\frac{37}{85}$ E) $\frac{113}{321}$

**167.** Halle el valor de la constante $a\in\mathbb{R}$ para que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$a_n=\frac{\sqrt{2an^2+3n+1}-(a-1)n+1}{(a-1)n+5}$$

converge a 1.

A) $-2$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$

D) 1 E) 2

**168.** Calcule el valor de convergencia de la siguiente sucesión.

$$\{a_n\}=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^4,\left(\frac{3}{4}\right)^5,\left(\frac{4}{5}\right)^6,\left(\frac{5}{6}\right)^7....\right\}$$

**Nota:** e es el número de napier

A) $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ B) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ C) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

D) $\frac{1}{e}$ E) $\frac{1}{e^2}$

**169.** Determine el valor de convergencia de la sucesión $\{a_n\}$, donde:

$$a_n=\left[\frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)}\right]^{n+3}$$

A) $e^{-6}$ B) $e^{-3}$ C) $e^{-1}$

D) $e^2$ E) $e^3$

**170.** Sea $\{a_n\}$ una sucesión donde:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k)\ ;\ S_1=10$$

$$S_{n+1}=\frac{1}{2}\quad S_n+1,\ n\in\mathbb{N}$$

Determine la suma de los valores a los cuales convergen $\{a_n\}$ y $\{S_n\}$.

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1

D) $\frac{3}{4}$ E) 2

**171.** Halle el valor de convergencia de la sucesión $\{b_n\}$ si:

$$b_n=\left(\frac{\sqrt{a^2+n^2+2(a\cdot n-n-a)+1}}{n}\right)$$

Considere $n+a>1$ ; $\forall n\in\mathbb{Z}^+$

A) $e^a$ B) a C) $e^{-1}$

D) $e^{-a}$ E) $e^{a-1}$

**172.** Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$a_n=n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$$

Determine el valor $L=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$

A) e  B) $\frac{1}{e}$  C) 1

D) $\frac{e}{2}$  E) $\frac{2}{e}$

**173.** Si se tienen las sumas

$$\sum_{k=1}^{10}(rk+m)=70$$

$$\sum_{k=3}^{10}(rk-m)=136$$

Halle el valor de 5r + 2m

A) 2  B) 3  C) 4

D) 5  E) 8

**174.** Determine cuántos de las siguientes series, convergen.

I. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right)$

II. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n^3+1}\right)$

III. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

IV. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)$

V. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}\right)$

A) 1  B) 2  C) 3

D) 4  E) 5

**175.** Halle el valor de la suma:

$$S=\sum_{i=1}^{100}\left[\sum_{j=1}^{100}(i+j)\right]$$

A) $100(10^4)$  B) $101(10^4)$

C) $102(10^4)$  D) $103(10^4)$

E) $105(10^4)$

**176.** Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. $a_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k}\right)$ entonces $\{a_n\}$ es decreciente y acotada.

II. Si $\{a_n\}$ es tal que:

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n}} \quad ;$$

entonces $\{a_n\}$ es decreciente.

III. Si $\{a_n\}$ es una sucesión creciente y acotada; entonces $\{a_n\}$ es convergente.

A) VVV  B) VFV  C) VVF

D) FVV  E) FFV

**177.** Hallar el valor de convergencia en la siguiente serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ ; si } a_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$

A) $\sqrt{2}$  B) $1+\sqrt{2}$  C) $\sqrt{2}+2$

D) $1-\sqrt{2}$  E) $\sqrt{2}$

**178.** Halle el valor de convergencia de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2^n n!}\right)$$

A) 0  B) $\frac{1}{2}$  C) $\frac{3}{4}$

D) 1  E) $\frac{5}{4}$

**179.** Dada la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right] \quad x \in \mathbb{R}$$

Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

I. $x > 2$

II. $x \in [3\,;\infty\rangle$

III. $x < 2$

A) FFF  B) FFV  C) FVV

D) VVV  E) FVF

**180.** Determine la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes afirmaciones.

I. Si $S_1 = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots$

entonces $S_1 = 4$

II. Si $S_2 = 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right) + \ldots$ entonces $S_2 = \frac{3}{2}$

III. Si $S_3 = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k!}\right)$ entonces $S_3 = 2$

A) VVV  B) FFF  C) VFF

D) FVV  E) VFV

**181.** Halle el valor de convergencia de la serie:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\mathrm{Log}_{1/2}(1/12)\right)^{-k}$$

A) $\mathrm{Log}_{24}2$  B) $\mathrm{Log}_{2}6$  C) $\mathrm{Log}_{24}3$

D) $\mathrm{Log}_{2}24$  E) $\mathrm{Log}_{6}2$

**182.** Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ es convergente con $a_n > 0$. Determine la verdad (V) o falsedad (F) de la siguientes afirmaciones:

I. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2)$ es convergente

II. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{1+a_n}\right)$ es divergente

III. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)a_n\right]$ es convergente.

A) VVV  B) VFV  C) VVF

D) FVV  E) FFF

**183.** Halle el valor de convergencia de la $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{n^2-7n-3}{(n+3)!}\right]$

A) $\frac{e-89}{2}$  B) $\frac{32e-89}{2}$

C) $\frac{64e-89}{2}$  D) $\frac{4e-23}{2}$

E) N.A.

**184.** Dada la serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{nLn(n)}\right]$$; podemos afirmar que:

A) Converge a 0
B) Converge a 1
C) Converge a e
D) Converge a Ln2
E) Diverge

**185.** Si $0<a<b<1$; entonces la serie $a+b+a^2+b^2+a^3+b^3+...$

A) Converge a 1
B) Converge a $\frac{1}{a-ab}$
C) Converge a $\frac{ab}{1-ab}$
D) Converge a $\frac{ab}{1+ab}$
E) Converge a $\frac{a+b-2ab}{(1-a)(1-b)}$

**186.** El número de términos de una progresión aritmética comprendidos entre 23 y 59 es el doble del número de términos comprendidos entre 3 y 23. Entonces la razón es:

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

**187.** Una máquina costo inicialmente 8192 nuevos soles. Al cabo de unos años se vendio la mitad de su precio. Pasados unos años volvió a venderse a la mitad, y así sucesivamente. Si el total de propietarios ha sido 7, entonces ¿Cuál es la suma total pagada por esa máquina?

A) S/. 4096 B) S/. 8192
C) S/. 16256 D) S/. 16384
E) S/. 16384

**188.** Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\forall n\in\mathbb{N}$:

$a_{n+1}-a_n=5$

Además: $a_{10}+a_2=a_4+a_8$

Determine: $a_{20}$

A) 60 B) 80 C) 100
D) 120 E) 140

**189.** Un estudiante de nuestra academia se propone repasar álgebra el día 01 de julio durante una quincena, haciendo cada dia 2 ejercicios más que el día anterior. Si el primer día empezó haciendo 1 ejercicio, entonces ¿Cuántos ejercicios le tocará hacer el día 15 de julio?

A) 25 B) 27 C) 29
D) 31 E) 33

**190.** Una progresión aritmética tiene la propiedad de que el producto de los cuatro primeros términos es –15 la relación del segundo al tercero es 3. ¿Cuántos términos es preciso considerar para que la suma sea cero?

A) 6 B) 9 C) 12
D) 18 E) 20

**191.** En una sucesión aritmética se tiene que el segundo, cuarto y noveno término forman una progresión geométrica, se le pide hallar la razón geométrica.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{3}{10}$ C) 1
D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{5}{2}$

**192.** Dada la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{a^n(n^2+1)}\right];\ a>0$$

Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si $|a|>1$; entonces la serie diverge.

II. Si $|a|<1$; entonces la serie converge.

III. $\forall a>1$; entonces la serie converge.

A) VVV B) FVV C) VVF
D) FFF E) FFV

**193.** Calcule valor de la suma finita:

$$\sum_{n=10}^{99}\left[\frac{\operatorname{Log}\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\operatorname{Log} n\cdot\operatorname{Log}(n+1)}\right]$$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1
D) $\frac{3}{2}$ E) 2

**194.** Determine el valor de x en la ecuación:

$$\sum_{k=1}^{2n+1}\left(k+\sum_{r=1}^{n}(2r-1)\right)=(n+1)^3+x$$

A) 0 B) 1 C) n
D) $n^2$ E) $n^3$

**195.** Determine la siguiente suma:

$$S=1+\frac{13}{25}+\frac{35}{125}+\frac{97}{625}+\ldots.$$

A) $\frac{9}{4}$ B) $\frac{11}{5}$ C) $\frac{13}{6}$
D) $\frac{15}{7}$ E) $\frac{17}{8}$

**196.** La diferencia entre la suma de los (n+1) primeros términos de una progresión geométrica con la suma de los n primeros términos es x y la diferencia entre la suma de los (n+2) primeros términos de dicha progresión con la suma de los n primeros términos es y halle la razón de dicha progresión.

A) $y-2x$ B) $\frac{x}{y}-1$ C) $x-\frac{y}{x}$
D) $\frac{y}{x}-1$ E) $1-\frac{y}{x}$

**197.** José compra un auto de manera que en la primera cuota paga S/.180 y en cada cuota siguiente paga S/.10 más que la anterior. ¿Cuántas cuotas pagó si en total el auto le costó S/.12 780?

A) 25 B) 30 C) 36
D) 40 E) 45

**198.** Dada la sucesión $\{a_n\}$, tal que:

$$a_n=\frac{3n+1}{2n-1}$$

entonces indique el valor de verdad de:

I. La sucesión es creciente

II. La sucesión es decreciente

III. La sucesión es acotada

A) VFV B) FFF C) FFV
D) FVV E) VVV

**199.** Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_px^p$$

$a_p \neq 0$ es una función polinomial

entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} a_pn^p$

II. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3n+2} - n = \dfrac{3}{4}$

III. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = M \to \exists\ I = [a;b]$

tal que: $x(n) \subset I\ \forall n \in \mathbb{N}$

A) VVF B) FVV C) FVF
D) FFV E) VFV

**200.** Sean las sucesiones:

* $\{S_n\}_{n\in N_0}$ tal que $S_0 = 1$; $S_1 = 0$;

$S_2 = 0$; $S_3 = \dfrac{1}{2}$; $S_{2k-1} = \dfrac{1}{k}$;

$S_{2k} = 0\ \forall k \geq 2$.

* $\{P_n\}_{n\in N_0}$ tal que $P_0 = 1$; $P_1 = 7$;

$P_2 = 0$; $P_3 = \dfrac{1}{2}$;....; $P_{2k-1} = \dfrac{1}{k}$;

$P_{2k} = 1\ \forall k \geq 2$.

Respecto a los límites de la sucesión, se puede afirmar respectivamente.

A) 0;0
B) 0;1
C) No existe; no existe
D) No existe; 1
E) 0 ; no existe

**201.** Un hombre pone una pareja de conejos en un lugar cercado para todos lados. ¿Cuántas parejas de conejos tendrá a cabo de un año si se supone que cada engendra cada mes una nueva pareja que a su vez; es fértil a partir del segundo mes de vida?

A) 200 B) 233 C) 1000
D) 1010 E) 1100

**202.** Dada la solución:

–2; 0; 2; 4; 6; 8; 10; ............

Determine el octavo tèérmino

A) 18 B) 17 C) 16
D) 14 E) 12

**203.** Si $\{a_n\}$ es una sucesión tal que:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n+1}{n+5} & ;\ n \text{ par} \\ \dfrac{n^2+5}{n^3+2n} & ;\ n \text{ impar} \end{cases}$$

Entonces cuál de las siguientes afirmaciones son correctas:

A) La sucesión es convergente
B) La sucesión es monótona
C) La sucesión es creciente
D) La sucesión es decreciente
E) La sucesión tiene dos puntos límites.

**204.** Siendo la sucesión $\{a_1; a_2; ...a_n...\}$ se cumple:

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$; $\forall n \geq 1$ y

$a_9 = a_{11} = 10$.

Halle $a_3 + a_4 + a_5 + a_6$

A) 30 B) 40 C) 50
D) 60 E) 70

**205.** Halle el valor de convergencia de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde:

$$a_n = \left(\frac{n+3}{n}\right)^{\frac{n^2}{n+3}}$$

A) e  B) $e^2$  C) $e^3$
D) 2e  E) 3e

**206.** Sea la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ dada por

$a_1 = 2$;  $a_2 = \frac{9}{4}$;  $a_3 = 1$  y

$a_n = \frac{4n-3}{2n+1}$ si $n \geq 4$.

¿Cuántos elementos de la sucesión no satisfacen $\left|a_n - 2\right| < \frac{1}{2}$?

A) 0  B) 1  C) 2
D) 3  E) 4

**207.** Si $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión; halle el valor de $\lim_{n\to\infty}(S_n)$ si:

$S_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ ; $0 < a < b$

A) 1  B) 2  C) a
D) ab  E) b

**208.** En la igualdad:

$$\underbrace{2+6+12+20+\ldots}_{\text{"n" términos}} = 44n$$

el valor de n.

A) 8  B) 9  C) 10
D) 11  E) 12

**209.** Determine el término de lugar 12 en la sucesión $\{a_n\}$:

1; 1; 2; 4; 7; 13; 24; 44 ..........

Como respuesta de la suma de sus digitos.

A) 6  B) 7  C) 8
D) 9  E) 10

**210.** Supongamos que una ventana de gran tamaño esta compuesta de dos paneles de vidrio paralelos. Un rayo de luz de intensidad $I$ llega a la ventana exterior.

Experimentalmente se ha determinado que $\frac{1}{4}$ de la intensidad luminosa es reflejada y $\frac{3}{4}$ atraviesan cada panel de vidrio. Entonces la fracción de laintensidad original I que entra al cuarto es:

A) $\frac{3}{15}I$  B) $\frac{2}{25}I$  C) $\frac{9}{16}I$
D) $\frac{5}{13}$  E) $\frac{3}{25}$

**211.** Dada la sucesión:

$\left\{1; \frac{4}{5}; \frac{5}{7}; \frac{2}{3}; \frac{7}{11}; \ldots\ldots\right\}$ ¿A partir de qué lugar los términos de la sucesión son menores que $\frac{2}{3}$?

A) 4  B) 5  C) 6
D) 7  E) 8

**212.** Determine el valor de «a»; si la sucesión $\left\{\left(\frac{n+9}{n+7}\right)^{an+5}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ converge al valor de $e^{\sqrt{2}}$.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$  B) $\sqrt{2}$  C) 1
D) 2  E) 4

**213.** Determine el valor de convergencia de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; si $a_1=0$ y $a_{n+1}=\sqrt[3]{a_n+6}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

**214.** Dada la sucesión definida por:

$$\begin{cases} a_n=a_{n-1}+2n-2\;;\; n\geq 2 \\ a_1=15 \end{cases}$$

Determine: $a_{15}$

A) 120 B) 160 C) 180
D) 225 E) 250

**215.** Determine el valor de convergencia de la sucesión $\left\{\left(\frac{\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{9}}{2}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

**216.** Dada la sucesión:

$a_n=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$; $n\in\mathbb{N}$, halle su convergencia.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C) 1
D) 2 E) $\frac{1}{3}$

**217.** Si la sucesión:

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{n^3+1}{n+2}+an^2+bn+c\right\}$$

es convergente al valor cero, halle la relación correcta entre los valores de a; b y c.

A) $a+b<c$ B) $b+c=a$
C) $a+b+c<0$ D) $a+b+c>0$
E) $a+b=4c$

**218.** Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $a_n=\dfrac{n+2}{2n+1}$; si L es el valor de conver- gencia de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\left|\dfrac{n+2}{2n+1}-L\right|<0{,}001$; entonces el máximo valor entero que puede admitir k(n > k) es:

A) 740 B) 742 C) 745
D) 748 E) 749

**219.** Calcule el valor de convergencia de la sucesión:

$$\{a_n\}=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^5;\left(\frac{3}{7}\right)^7;\left(\frac{5}{7}\right)^9;\left(\frac{7}{9}\right)^{11};.....\right\}$$

A) $e^{-4}$ B) $e^{-3}$ C) $e^{-2}$
D) $\frac{1}{2}e^{-1}$ E) 1

**220.** Determine la suma:

3 + 10 + 29 + 66 +..... + 1002

A) 3376 B) 3045 C) 3065
D) 2045 E) 2065

**221.** Determine el valor de:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{3}{9k^2+3k-2}-\frac{1}{3n+2}\right]$$

A) $\frac{n}{3n+2}$ B) $\frac{5n}{3n+2}$ C) $\frac{n}{6n+4}$
D) $\frac{5n}{6n+4}$ E) $\frac{3n}{6n+4}$

**222.** Halle el valor de S tal que:

$$S=\sum_{k=1}^{n+1}\log\left[2^{2^k}\cdot\tan\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

A) $S=\left(2^{n+1}-1\right)\log 4$

B) $S=2^{n+1}\cdot\log 4$

C) $S=2^{n+3}-1$

D) $S=4^n-n$

E) $S=\dfrac{n(n+1)}{2}$

**223.** Determine el valor de la siguiente suma:

$$\sum_{j=0}^{19}2^{j+1}-\sum_{k=-3}^{16}16\cdot 2^k+\sum_{\ell=3}^{10}2^{3-\ell}$$

A) $\dfrac{65}{32}$  B) $\dfrac{127}{64}$  C) $\dfrac{255}{128}$

D) $\dfrac{511}{256}$  E) $\dfrac{1023}{512}$

**224.** Calcule: $E=\sum\limits_{m=1}^{10}\sum\limits_{n=1}^{m}(6m)$

A) 1320  B) 1220  C) 1400

D) 1450  E) 2310

**225.** Determine la suma:

$1(2)^2+2(3)^2+3(4)^2+4(5)^2+.....$

$+...m(n+1)^2$ ; $n\in\mathbb{N}$

A) $\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)(3n+1)$

B) $\frac{1}{4}n(3n+1)(n+2)(3n+5)$

C) $\frac{1}{6}n(2n+1)(n+2)(3n+5)$

D) $\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$

E) $\frac{1}{18}n(n+1)(n+2)(3n+5)$

**226.** Determine el valor de:

$$E=\sum_{n=1}^{20}\left[\frac{2}{n(n+1)(n+2)}\right]$$

A) $\dfrac{113}{231}$  B) $\dfrac{117}{231}$  C) $\dfrac{115}{231}$

D) $\dfrac{119}{231}$  E) 1

**227.** Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{(2n-1)(2n+5)}\right]$; halle el valor de la suma.

A) $\dfrac{1}{9}$  B) $\dfrac{1}{24}$  C) $\dfrac{10}{31}$

D) $\dfrac{23}{90}$  E) $\dfrac{5}{9}$

**228.** Encuentre el valor de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}\right]$$

A) $\pi$  B) $2\pi$  C) $3\pi$

D) $4\pi$  E) $5\pi$

**229.** Dada la siguiente sucesión:

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{i}\right)$; indique el valor de convergencia; si es que existe.



A) No existe
B) Converge a 1
C) Converge a 2
D) Converge a 3
E) Converge a 4

**230.** Halle la siguiente suma:

$$S = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} + \ldots$$

A) $\frac{17}{2}$ B) $2e - 1$

C) $\frac{1}{2}\left(e + e^{-1}\right)$ D) $e + e^{-1}$

E) $e^2 + 1$

**231.** Calcule la siguiente suma:

$$S = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \ldots$$

A) 12 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$

D) 0 E) $\frac{4}{5}$

**232.** Calcular:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

**233.** Calcular:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2 + 4n + 3}\right]$$

A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{8}{11}$ E) $\frac{4}{5}$

**234.** Si la suma de las n primeros términos de la serie $\sum_{k=1}^{n} (a_k)$ de:

$S_n = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$. Determine el término $a_n$.

A) $2n^2 + n$ B) $2n^2 - n$ C) $n^2 - n$
D) $n^2 + n$ E) $n^2 - 1$

**235.** Determine el valor de la suma:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k^3} (2)^{-k}$$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$
D) 1 E) 2

**236.** Calcule:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2^{n-1}}{3^n}\right]$$

A) 2 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$

D) 1 E) $\frac{1}{2}$

**237.** Indique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{n} + 3}{n^3}\right]$ es convergente

II. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(3^{-n} + 4^{-n}\right)$ es divergente

III. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3^n}\right) = 2$

A) VVV B) VFV C) FVV
D) FFV E) FVF

**238.** Si s es una serie definida por

$$S=\sum^{\infty}\left[\frac{2k-1}{2^{k}(k!)}\right];\text{ entonces el valor}$$

de convergencia de S es:

A) 0 B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$

D) 1 E) $\frac{3}{2}$

**239.** Calcule la suma:

$$S=\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{2}{7^4}+\frac{1}{7^5}+\frac{2}{7^6}+\ldots$$

A) $\frac{3}{15}$ B) $\frac{3}{17}$ C) $\frac{3}{14}$

D) $\frac{3}{16}$ E) $\frac{3}{20}$

**240.** Determine el valor de verdad de la siguientes afirmaciones:

I. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n+n^2}\right)$ es convergente

II. La serie $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\text{Ln } k}\right)$ es convergente.

III. La serie $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^k+\pi}\right)$ es divergente.

A) VFV B) FFV C) VVV

D) VFF E) FVF

**241.** Determine el valor de convergencia de la serie:

$$E=\frac{1}{5}+\frac{2}{25}+\frac{3}{125}+\frac{4}{625}+\ldots\infty$$

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{3}{16}$

D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{5}{16}$

**242.** Halle el valor de convergencia de la serie:

$$S=1+\frac{1}{5}+\frac{3}{25}+\frac{7}{125}+\frac{15}{625}+\frac{31}{3125}+\ldots$$

A) 2 B) $\frac{11}{12}$ C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{17}{12}$ E) $\frac{1}{12}$

**243.** Si se cumple que:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(15+8k+k^2\right)^{-1}=\frac{a}{b}+\frac{c}{n+4}+\frac{d}{n+5}$$

Determine el valor de:

$$E=a+b+c-d+40\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{15+8n+n^2}\right)$$

Sabiendo además que a y b son primos entre si y c; $d\in Q$.

A) 47 B) 51 C) 53

D) 58 E) 62

**244.** Determine el punto de convergencia de la sucesión definida mediante:

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)$$

A) $1-\sqrt{2}$ B) $2-\sqrt{2}$

C) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

E) $1+\sqrt{2}$

**245.** ¿A qué valor converge la serie $\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right]$?

A) $e-1$  B) $xe-1$  C) $e^x-1$

D) $\frac{e^{2x}-1}{e-1}$  E) $\frac{e^x-1}{e-1}$

**246.** Determine el valor de convergencia de la siguiente serie:

$$\frac{1}{7}+\left(\frac{\sqrt{5}}{7}\right)^2+\left(\frac{\sqrt[3]{17}}{7}\right)^3+\left(\frac{\sqrt[4]{65}}{7}\right)^4+\dots$$

A) $\frac{3}{7}$  B) $\frac{5}{7}$  C) $\frac{9}{8}$

D) $\frac{5}{14}$  E) $\frac{1}{2}$

**247.** Sean a; b; c tres números enteros que forman una progresión aritmética de razón positiva (en ese orden). Si a disminuye en 5; b disminuye en 3 y c aumenta en 11 se convierte a una progresión geométrica, si a + b + c = 36; determine la razón de la progresión aritmética.

A) 4  B) 6  C) 12

D) 16  E) 20

**248.** Determine el valor de la suma:

$$S=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\dots\dots$$
$$\dots+(n)(n+1)(n+2)$$

A) $3!\ C_4^{n+3}$  B) $2!\ C_4^{n+1}$

C) $3!\ C_3^{n+1}$  D) $2!\ C_2^{n+1}$

E) $3!\ C_3^{n}$

**249.** Sean los números positivos a; b y c que están en progresión geométrica podemos afirmar que:

$a^2\ b^2\ c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)$ es igual a:

A) $a^3+b^3+c^3$  B) $\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{a}+\frac{c^3}{b}$

C) $\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{b}+\frac{c^3}{a}$  D) $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}$

E) $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}+\frac{c^3}{c}$

**250.** Sabiendo que la suma de 30 números enteros consecutivos es 1665. Halle la suma de los 30 números consecutivos siguientes.

A) 2565  B) 2434  C) 2556

D) 2439  E) 2563

**251.** Si:

$\div\ \frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}\dots$ progresión aritmética

$\div\ a\cdot(b+1)\cdot c\dots$ progresión aritmética

$\div\div\ \left(a-\frac{1}{2}\right):b:c\dots$progresión geométrica

Halle: a + b + c

A) 5  B) 6  C) 7

D) 8  E) 11

**252.** Halle la progresión aritmética cuyo primer término es 1 y tal que los términos de lugares 2, 10 y 34 forman una progresión geométrica. Halle el $t_{67}$.

A) 15  B) 17  C) 16

D) 23  E) 27

**253.** Los números a,b + 15 ; 150 – a forman una sucesión aritmética creciente y los números a,b; 150–a forman una progresión geométrica. Halle: a

A) 30 B) 40 C) 60
D) 100 E) 120

**254.** En un paralelepípedo rectangular las tres dimensiones están en progresión aritmética y su suma vale 24m sabiendo que el área total mide $366 m^2$.

Calcule su volumen ($U^3$).

A) $440U^2$ B) $289U^3$ C) $125U^3$
D) $98U^3$ E) $89U^3$

**255.** Una ciudad A tiene una tasa anual de decrecimiento en su población del 12,5%; mientras que otra ciudad B tiene una tasa anual de crecimiento del 75%. ¿Al cabo de cuantos años ambas ciudades tendrán el mismo número de habitantes si la ciudad A y B tiene 9167360 y 143240 habitantes respectivamente?

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

**256.** La suma de los 8 términos de una progresión geométrica es igual a 82 veces la suma de los cuatro primeros términos. Halle la razón.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

**257.** Una hoja de papel de 0,001 mm de espesor se dobla en dos, resutando el espesor del papel doblado 0,002 mm. Si se repite este proceso 20 veces. ¿Cuál será el espesor (en mm) del papel doblado al final del proceso?

A) 1324,8496 B) 131,0724
C) 262,144 D) 524,2882
E) 1048,5764

**258.** Determine el término 20 en la sucesión $\left\{2;\frac{9}{4};\frac{64}{27};\frac{625}{256};....\right\}$

A) $2^{20}$ B) $21^{20}$ C) $\left(\frac{21}{20}\right)^{21}$
D) $\left(\frac{21}{20}\right)^{20}$ E) $\left(\frac{20}{21}\right)^{20}$

**259.** Determine el n–ésimo término de la sucesión:

$$\left\{1;\frac{3}{5};\frac{7}{11};\frac{13}{19};\frac{21}{29};....\right\}$$

A) $\frac{2n-1}{4n-3}$ B) $\frac{2n-3}{2n^2-3}$
C) $\frac{n^2+n-1}{n^2-n+2}$ D) $\frac{n^2-n+1}{n^2+n-1}$
E) $\frac{n^2-n-3}{n^2+n+5}$

**260.** Dada la sucesión $\{a_1, a_2, ......, a_n\}$ ; si $a_1=\sqrt{2}$ y $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$ , $\forall n>1$, determine el exponente de 2 en el término $a_n$.

A) $2^{-n}$ B) $1-2^n$ C) $1+2^{-n}$
D) $1-2^{-n}$ E) $2^{n-1}$

**261.** Sea la sucesión $\{a_n\}$ cuyos cuatro primeros términos $\frac{5}{5},\frac{9}{10},\frac{13}{15},\frac{17}{20},\ldots$. Determine a partir de que lugar los términos de la sucesión son menores que 0,81.

A) 18 B) 19 C) 20
D) 21 E) 22

**262.** Indique la sucesión o sucesiones que cumplen: $a_n < a_{n+1}\ \forall n \geq 1$

I. $\{2n+1\}$

II. $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$

III. $\left\{\frac{3n-1}{4n+1}\right\}$

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) I y III E) I y II

**263.** Determine cuántas proposiciones son verdaderas:

I. Si $\{a_n\}$ es creciente, $\{b_n\}$ es creciente cuando $b_n = a_n + 2^n$.

II. Si $\{a_n\}$ es creciente, $\{-a_n\}$ es decreciente.

III. Si $\{a_n + b_n\}$ es creciente, entonces $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son crecientes.

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) I y II E) II y III

**264.** Dada la sucesión $\{a_n\}$ con

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n+n}},$$

indique cuál(es) de los enunciados son correctos:

I. La sucesión $\{a_n\}$ es convergente

II. La sucesión $\{a_n\}$ es divergente

III. La sucesión $\{a_n\}$ es acotada

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) I y III E) II y III

**265.** Dadas las sucesiones: $\{n2^{-n}\}$,

$$\{n^2\},\ \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\},\ \left\{\frac{n}{n^2+1}\right\},\ \left\{(-1)^n\frac{1}{n}\right\}$$

¿Cuántas de ellas son acotadas?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

**266.** De los siguientes enunciados:

I. Toda sucesión creciente es acotada
II. Toda sucesión creciente y acotada es convergente
III. Toda sucesión acotada es convergente.

Son verdaderos:

A) I, II y III B) Sólo II C) I y II
D) I y III E) III

**267.** Determine el valor de convergencia de la siguiente sucesión:

$$\left\{\frac{2}{5},\frac{5}{11},\frac{10}{21},\frac{17}{35},\ldots\right\}$$

A) $\frac{13}{2}$ B) 7 C) 6

D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{8}$

**268.** Sea $\{a_n\}_{n\in N}$ / $a_n=\dfrac{2^n+3^{n+1}}{3^n+2^{n+1}}$ converge a:

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

**269.** Sea $\{a_n\}_{n\in N}$ una sucesión tal que $a_n\geq 0$ y $15(a_{n+1})^2=2+7a_n$; determine el valor de convergencia de la sucesión $\{a_n\}$.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{3}$
D) 6 E) 8

**270.** Halle los valores de a y b para que la sucesión $\{a_n\}$ definida por:

$a_n=-\dfrac{n^3+1}{n^2+1}+an+b$ para que la sucesión converge hacia cero. De cómo respuesta la suma de estos valores.

A) – 2 B) – 1 C) 0
D) 1 E) 2

**271.** Si la sucesión:

$$\left\{\sqrt{n-\sqrt{\sqrt{a}n+\sqrt{\sqrt{a^3}n}}}-\sqrt{n}\right\}_{n\geq 1}$$

converge a $-\frac{1}{2}$. Determine el valor de «a».

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1
D) 2 E) 4

**272.** Determine el valor de convergencia de la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ definida por: $a_{n+1}=\sqrt{4a_n-a_n^{\,2}}$ ; $a_1\in\langle 0;2\rangle$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

**273.** Sea la sucesión $\{a_n\}$ definida por:

$a_n=\left(1-\dfrac{3}{n}\right)^{\frac{n^2}{n+3}}$ y los enunciados:

I. $\{a_n\}$ es acotada

II. $\{a_n\}$ es convergente

III. $\{a_n\}$ es divergente

A) I y II B) Sólo III C) Sólo II
D) Sólo I E) II y III

**274.** La sucesión $\left\{\left(\frac{3}{6}\right)^4,\left(\frac{4}{7}\right)^5,\left(\frac{5}{8}\right)^6,\ldots\right\}$ es convergente a:

A) 1 B) $e^{-1}$ C) $2e^{-2}$
D) $e^{-3}$ E) $e^{-4}$

**275.** Hallar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. $\left\{\dfrac{(-1)^n}{5n^2+3}\right\}_{n\geq 1}$ es convergente

II. $\left\{\dfrac{n+1}{n+2}\right\}_{n\geq 1}$ es creciente



III. $\{n+2^n\}_{n\geq 1}$ no es constante

A) FVV B) FFV C) VFF
D) VVV E) FFF

**276.** Determine el valor de convergencia de la sucesión

$$\{a_n\}_{n\geq 1};\ a_n=\frac{(2n+3)^3\cdot(3n-2)^2}{n^5+5}$$

A) 16 B) 32 C) 48
D) 64 E) 72

**277.** Sea la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n=\dfrac{n+1}{2n+1}$, ¿cuál es el menor entero positivo k tal que $\left|a_k-\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right|<\in$, con $\in\leq\dfrac{1}{2}$?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

**278.** Dada la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$,

$a_n=\dfrac{2n-1}{n+3}$ decir el valor de verdad de las siguientes afirmaciones.

I. $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

II. $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

III. $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n^{-n}}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

A) VVV B) VFF C) VVF
D) VFV E) FFF

**279.** Sea $\{a_n\}$ tal que:

$$a_n=\prod_{k=1}^{100}\left(1+\frac{k}{n+1}\right)^n$$

Determina el punto de convergencia.

A) 1 B) k! C) $e^k$
D) $e^{k!}$ E) $e^{5050}$

**280.** Sean las sucesiones de igual punto de convergencia:

$$\left\{\left(\frac{n+a}{n+1}\right)^{3n+a}\right\}_{n\geq 1};\ \left\{\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{bn}\right\}_{n\geq 1}$$

Determinar el valor de: $a-\dfrac{b}{3}$.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

**281.** Determinar el valor de convergencia de la sucesión:

$$\left\{\frac{5n^2+\sqrt[3]{2-3n^2-27n^6}}{5n^2-3n+2}\right\}_{n\geq 1}$$

A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) $\dfrac{3}{5}$

D) $\dfrac{2}{5}$ E) 1

**282.** Para la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$,

$a_n=\dfrac{n+1}{2n+3}$. ¿A partir de que término de la sucesión, la diferencia de dos términos consecutivos es menor que $\dfrac{1}{100}$?

A) $a_3$  B) $a_4$  C) $a_5$
D) $a_6$  E) $a_7$

**283.** Indicar el alor de verdad de las afirmaciones siguientes:

I. La sucesión $\left\{(-1)^{2n+1}\right\}_{n\in N}$ es acotada.

II. La sucesión $\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}_{n\in N}$ es creciente y acotada.

III. La sucesión $\left\{(-2)^{n+1}\right\}_{n\in N}$ no esta acotada.

A) VVF  B) VFV  C) VVV
D) VFF  E) FVV

**284.** Indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. La suma de dos sucesiones convergentes es siempre convergente.
II. La suma de una sucesión convergente mas una sucesión divergente es siempre divergente.
III. La suma de dos sucesiones divergentes es siempre divergente.

A) VVV  B) VVF  C) VFV
D) VFF  E) FFF

**285.** Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. La sucesión $a_n=\frac{3^n+2^{n+1}}{3^{n+1}+2^n}$ es decreciente.

II. La sucesión $b_n=(-1)^n\frac{13^n}{n+1}$ es convergente.

III. La sucesión $c_n=\left(\frac{6n+1}{3n+2}\right)^{-n^2}$ es divergente.

A) VFF  B) VFV  C) FFF
D) FFF  E) VVV

**286.** Indicar el valor de verdad de las siguientes afimaciones:

I. La sucesión $\left(\text{Log}_2\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$ es decreciente.

II. La sucesión $\left(\frac{n^2}{n+1}\right)_{n\geq 1}$ es creciente.

III. La sucesión $\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ no es monótona.

A) VVF  B) VFV  C) VVV
D) VFF  E) FVF

**287.** Indique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. La sucesión $\left\{\frac{2}{3};\frac{3}{5};\frac{4}{7};.....\right\}$ converge a $\frac{1}{3}$.

II. La sucesión $\left\{\frac{n+2}{\sqrt{n^2+1+n}}\right\}$ converge a $\frac{1}{2}$.

III. La sucesión $\left\{\frac{2^n+3^{n+1}}{3^n+4^n}\right\}$ converge a 0.



A) VVV B) VFV C) FVV
D) VFF E) FFF

**288.** Dada la sucesión:
$\{1;7;10;23/2;...\}$, determine el valor de verdad de las proposiciones:
I. La sucesión converge a 13.
II. La sucesión es acotada
III. El octavo término de la sucesión es $\frac{413}{32}$

A) VVF B) FVV C) FFV
D) VVV E) FFF

**289.** Hallar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. $\left\{\frac{(-1)^n}{2n^2+1}\right\}_{n\geq 1}$ es acotada.

II. $\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}_{n\geq 1}$ es creciente

III. $\left\{1-(-1)^n\right\}_{n\geq 1}$ es constante

A) FVV B) FFV C) VFF
D) VVV E) FFF

**290.** Sea la sucesión $\{U_n\}$ donde $U_{n+1}=\sqrt{k+U_n}$, k > 0, suponiendo que la sucesión es convergente. Determine el valor de convergencia

A) $\frac{1+\sqrt{4k+1}}{2}$

B) $\frac{1+\sqrt{1-4k}}{2}$

C) $\frac{1-\sqrt{1+4k}}{2}$

D) $\frac{2-\sqrt{1-4k}}{2}$

E) $\frac{1-\sqrt{1-4k}}{2}$

**291.** Determine el valor de la convergencia de la sucesión:

$$\{a_n\};\ a_n=n\left(\sqrt{2n^2+3}-\sqrt{2n^2+1}\right)$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

D) $2\sqrt{2}$ E) $\frac{5}{2}\sqrt{2}$

**292.** Sea la sucesión $S_0, S_1, S_2, ...S_k...$ donde $S_0=49$, $S_1=7$, $S_2=\sqrt{7},...S_k=7^{1/k(k-1)}$ para $k\geq 2$. Entonces, la suma de las cifras del producto de todos los términos de la sucesión será igual a:

A) 3 B) 4 C) 6
D) 2 E) 7

**293.** Si $S_n=\frac{n-3}{3n+2}$ es la suma de los «n» primeros términos de una sucesión. Halle el término $a_{n+1}$.

A) $\frac{9n}{(3n+5)(3n+2)}$

B) $\frac{n}{(3n+5)(3n+2)}$

C) $\frac{11}{(3n+5)(3n+2)}$

D) $\dfrac{3n-5}{(3n+5)(3n+2)}$

E) $\dfrac{3n-2}{(3n+5)(3n+2)}$

**294.** Determine el valor de:

$$\sum_{k=1}^{60}\left(\frac{1}{25k^2+5k-6}\right)$$

A) $\dfrac{10}{303}$ B) $\dfrac{20}{303}$ C) $\dfrac{37}{303}$

D) $\dfrac{41}{303}$ E) $\dfrac{53}{303}$

**295.** Halle el valor de la siguiente suma:

$$\sum_{n=1}^{20}\left[6(2n+1)^2+4(3n-1)^2\right]$$

A) 106050 B) 105050 C) 172400

D) 127000 E) 137050

**296.** Halle la fórmula para la siguiente sumatoria:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k^2+6k+4}$$

A) $\dfrac{n}{2(n+1)}$ B) $\dfrac{n}{4(n+2)}$

C) $\dfrac{n}{(n+1)n}$ D) $\dfrac{1}{(n-1)n}$

E) $\dfrac{n}{3(n+2)}$

**297.** Si $a_n=\dfrac{1}{n-4}$, $\forall n\geq 5$. Determine la suma de los términos de la fracción resultante al efectuar

$$\sum_{n=6}^{20}\left(a_{n-1}-a_n\right)$$

A) 40 B) 60 C) 20

D) 31 E) 51

**298.** Determine el valor de n al resolver la ecuación $\sum_{k=1}^{n}k=4(n+1)$.

A) 3 B) 6 C) 8

D) 10 E) 12

**299.** Determine el valor de n al resolver la ecuación $\sum_{k=1}^{100}\dfrac{2n+1}{(n^2+n)^2}$

A) $\dfrac{19900}{20101}$ B) $\dfrac{10300}{10201}$

C) $\dfrac{10200}{10201}$ D) $\dfrac{10300}{10301}$

E) $\dfrac{10400}{10401}$

**300.** Determine el valor de convergencia en:

$$\sqrt{\frac{1}{2}};\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}};\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}};\ldots$$

A) $\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{1}{2}$

D) 0 E) 1

# Clave

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | B | 31 | E | 61 | A | 91 | A | 121 | B | 151 | C | 181 | E | 211 | A | 241 | D | 271 | C |
| 2 | D | 32 | B | 62 | C | 92 | C | 122 | D | 152 | B | 182 | B | 212 | B | 242 | A | 272 | C |
| 3 | C | 33 | C | 63 | D | 93 | B | 123 | D | 153 | D | 183 | B | 213 | D | 243 | C | 273 | A |
| 4 | C | 34 | A | 64 | B | 94 | C | 124 | A | 154 | A | 184 | E | 214 | E | 244 | D | 274 | D |
| 5 | C | 35 | B | 65 | C | 95 | C | 125 | A | 155 | A | 185 | E | 215 | B | 245 | A | 275 | D |
| 6 | D | 36 | B | 66 | C | 96 | E | 126 | E | 156 | B | 186 | B | 216 | C | 246 | A | 276 | E |
| 7 | B | 37 | B | 67 | B | 97 | C | 127 | A | 157 | A | 187 | C | 217 | E | 247 | A | 277 | A |
| 8 | E | 38 | A | 68 | D | 98 | A | 128 | D | 158 | A | 188 | C | 218 | C | 248 | A | 278 | C |
| 9 | A | 39 | B | 69 | A | 99 | B | 129 | C | 159 | D | 189 | C | 219 | C | 249 | E | 279 | E |
| 10 | C | 40 | E | 70 | C | 100 | D | 130 | D | 160 | B | 190 | A | 220 | A | 250 | D | 280 | B |
| 11 | D | 41 | A | 71 | D | 101 | C | 131 | D | 161 | A | 191 | E | 221 | C | 251 | A | 281 | D |
| 12 | B | 42 | D | 72 | E | 102 | D | 132 | E | 162 | A | 192 | E | 222 | E | 252 | A | 282 | B |
| 13 | C | 43 | C | 73 | A | 103 | C | 133 | E | 163 | C | 193 | B | 223 | D | 253 | E | 283 | C |
| 14 | C | 44 | A | 74 | D | 104 | C | 134 | C | 164 | C | 194 | E | 224 | C | 254 | C | 284 | B |
| 15 | D | 45 | C | 75 | C | 105 | E | 135 | C | 165 | E | 195 | C | 225 | D | 255 | A | 285 | A |
| 16 | C | 46 | E | 76 | A | 106 | A | 136 | C | 166 | C | 196 | D | 226 | A | 256 | C | 286 | C |
| 17 | D | 47 | E | 77 | C | 107 | B | 137 | D | 167 | E | 197 | C | 227 | A | 257 | E | 287 | C |
| 18 | A | 48 | A | 78 | A | 108 | E | 138 | E | 168 | D | 198 | D | 228 | C | 258 | D | 288 | E |
| 19 | D | 49 | B | 79 | D | 109 | C | 139 | B | 169 | A | 199 | E | 229 | C | 259 | D | 289 | C |
| 20 | C | 50 | B | 80 | A | 110 | D | 140 | B | 170 | E | 200 | E | 230 | E | 260 | D | 290 | A |
| 21 | D | 51 | A | 81 | A | 111 | E | 141 | D | 171 | E | 201 | B | 231 | A | 261 | D | 291 | A |
| 22 | D | 52 | C | 82 | C | 112 | D | 142 | D | 172 | C | 202 | E | 232 | D | 262 | D | 292 | E |
| 23 | A | 53 | D | 83 | C | 113 | E | 143 | A | 173 | A | 203 | E | 233 | C | 263 | D | 293 | C |
| 24 | C | 54 | B | 84 | A | 114 | D | 144 | D | 174 | C | 204 | E | 234 | D | 264 | B | 294 | B |
| 25 | C | 55 | E | 85 | B | 115 | D | 145 | D | 175 | B | 205 | C | 235 | B | 265 | D | 295 | C |
| 26 | E | 56 | A | 86 | C | 116 | C | 146 | E | 176 | E | 206 | C | 236 | D | 266 | B | 296 | B |
| 27 | A | 57 | B | 87 | A | 117 | A | 147 | B | 177 | D | 207 | E | 237 | D | 267 | D | 297 | D |
| 28 | D | 58 | E | 88 | D | 118 | B | 148 | D | 178 | D | 208 | D | 238 | D | 268 | C | 298 | C |
| 29 | C | 59 | C | 89 | C | 119 | B | 149 | D | 179 | A | 209 | C | 239 | E | 269 | B | 299 | C |
| 30 | E | 60 | C | 90 | B | 120 | B | 150 | A | 180 | C | 210 | B | 240 | D | 270 | B | 300 | C |

- Sucesión de números reales
- Sucesiones acotadas
- Sucesiones monótonas
- Límite de una sucesión
- Subsucesiones
- Sucesiones notables
- Teoremas adicionales
- Serie de números reales
- Series notables
- Criterios de convergencia
- Series alternadas
- Series de potencias
- Progresión aritmética (P.A)
- Progresión armónica (P.H)
- Progresión geométrica (P.G)
- Progresiones especiales
- Problemas resueltos
- Problema propuesto

## Colección Lambda

- **Lógica y conjuntos.**
- **Expresiones algebraicas I.**
- **Expresiones algebraicas II.**
- **Radicación y potenciación.**
- **Cálculo de probabilidades.**
- **Números complejos.**
- **Ecuaciones I.**
- **Ecuaciones II.**
- **Números reales, desigualdades e inecuaciones.**
- **Relaciones y funciones.**
- **Logaritmación en $\mathbb{R}$.**
- **Limites y derivadas**
- **Sucesiones y series.**
- **Matrices y determinantes.**
- **Introducción a la programación lineal en $\mathbb{R}^2$**




Jr. Rufino Torrico 889 Of. 208 - Cercado de Lima
Telefax: 332-4110 / 726-4141
RPC: 989-101631 / 997-894292 RPM: #995-739126
www.editorialmegabyte.com

